# УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА УЧАЩИХСЯ, ОСНОВАННАЯ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАГЛЯДНЫХ ОБРАЗОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

***Далингер Виктор Алексеевич***
*доктор педагогических наук, профессор*
*Омский государственный педагогический университет*
*г. Омск*
DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2019.1.45.34

# TEACHING AND RESEARCH WORK OF STUDENTS IN MATHEMATICS, BASED ON THE USE OF VISUAL IMAGES OF MATHEMATICAL OBJECTS

***Dalinger Viktor***
*doctor of pedagogical sciences, professor*
*Omsk State Pedagogical University*
*Omsk*

**Аннотация**

В статье уделено внимание организации и содержанию учебно-исследовательской работы учащихся по математике, рассматривается вопрос о формировании у учащихся необходимых умений по работе с чертежом, указываются два ведущих способа работы с чертежом (реконструкция, дополнительные построения), приводятся примеры учебно-исследовательской деятельности учащихся по решению геометрических задач, иллюстрирующие как аналитические методы решения, так и методы, основывающиеся на наглядно-образных представлениях. Наглядные образы математических объектов при решении задач могут использоваться как явно, так и не явно, но главное в том, что они выполняют не только иллюстративную функцию, но и познавательную. Использование наглядных образов математических объектов в обучении математике является основой когнитивно-визуальной технологии обучения, которая направлена на сбалансированное использование резервов левого и правого полушарий головного мозга учащихся в обучении. Наглядные образы математических объектов эффективны как в обучении учащихся решению геометрических задач, задач с параметрами и т.д., так и в обучении учащихся доказательству математических предложений. Предложенные задачи могут послужить основой для организации учебно-исследовательской работы учащихся по математике. Указанные в статье задачи могут служить вектором для разработки учителем собственных задач исследовательского характера.

**Abstract**

The article focuses on the organization and content of educational and research work of students in mathematics, discusses the formation of students' necessary skills to work with a drawing, indicates two leading ways of working with a drawing (reconstruction, additional construction), provides examples of teaching and research activities students to solve geometric problems, illustrating both analytical methods of solution and methods based on visual-figurative representations. Visual images of mathematical objects in solving problems can be used both explicitly and not explicitly, but the main thing is that they perform not only an illustrative function, but also an informative one. The use of visual images of mathematical objects in teaching mathematics is the basis of cognitive-visual learning technology, which is aimed at a balanced use of the reserves of the left and right hemispheres of students' brain in training. Visual images of mathematical objects are effective both in teaching students how to solve geometric problems, problems with parameters, etc., and in teaching students to prove mathematical propositions. The proposed tasks can serve as the basis for the organization of educational and research work of students in mathematics. The tasks indicated in the article can serve as a vector for the teacher to develop his own research tasks.

**Ключевые слова:** учебно-исследовательская работа учащихся; задачи исследовательского характера; методы решения геометрических задач; реорганизация чертежа; дополнительные построения; наглядно-образные представления.

**Keywords:** teaching and research work of students; research tasks; methods for solving geometric problems; reorganization of the drawing; additional constructions; visual and figurative representations.

В школьном курсе геометрии ведущую роль в обеспечении наглядности играет чертеж. В этом курсе можно выделить три вида чертежей:

а) чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;

б) чертежи, которые образно представляют условие решаемой задачи или рассматриваемого математического предложения;

в) чертежи, иллюстрирующие преобразование геометрических фигур.

С целью предупреждения ошибок учащихся в понимании роли и назначении чертежа, в умении читать и строить чертеж по словесному заданию условия целесообразно: довести школьников до полного понимания роли чертежа в геометрии; показать образцы чтения чертежей; добиться того, чтобы учащиеся умели видеть в чертеже не только то, что бросается в глаза, но и все то, что содержится в нем; формировать у учащихся навыки в технике черчения чертежа; применять вариацию положения чертежа; использовать компьютер для демонстрации чертежа в динамике.

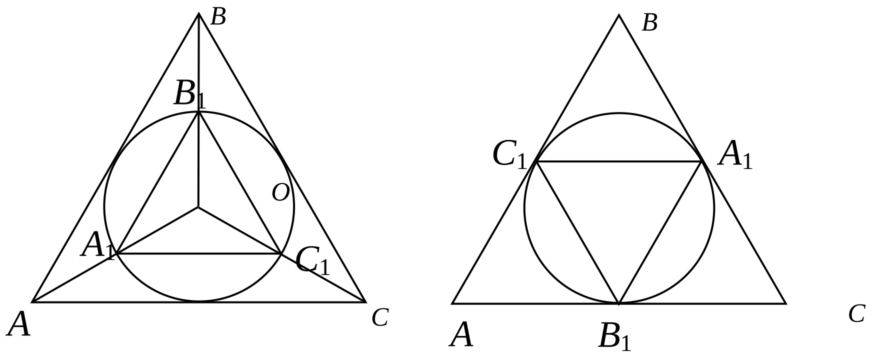
Заметим, что при решении задач, доказательстве теорем, чертеж является основным средством наглядности. Вот почему надо стремиться к тому, чтобы научить учащихся располагать чертеж так, чтобы он облегчал наглядное представление о содержании задачи или теоремы и помогал бы искать путь решения или доказательства. Проиллюстрируем сказанное на трех задачах (задачи 1,2).

**Задача 1.** Доказать, что периметр равностороннего треугольника, описанного около окружности, вдвое больше периметра равностороннего треугольника, вписанного в эту же окружность [1].

Если к этой задаче сделать чертеж, показанный на рис. 1а, то надо будет доказывать, что отрезок $C_1A_1$ является средней линией треугольника $COA$, а для этого ученик должен заметить, что отрезок $CO$ равен $2r$. Значительно проще решение задачи будет получено в том случае, если чертеж к ней будет таким, каким он изображен на рис. 1б.

Конечно, решение этой задачи может быть значительно упрощено, если использовать подобие фигур. Так как все равносторонние треугольники подобны, то отношение их периметров равно отношению любых соответственных линейных элементов, например, радиусов вписанных окружностей.

Но окружность, вписанная в больший из этих треугольников, является окружностью, описанной около меньшего из них. Отсюда и из свойств равностороннего треугольника сразу следует, что отношение этих радиусов равно 2.

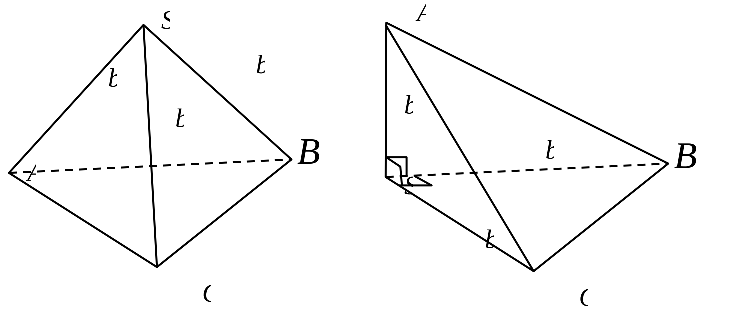



*а)* *б)*

*Рис. 1. Чертеж к задаче о вписанной и описанной окружности в равносторонний треугольник*

**Задача 2.** Найти объем треугольной пирамиды, если все плоские углы при вершине прямые и боковые ребра равны $b$ [2].

Как показывает практика, абсолютное большинство учащихся к этой задаче строят чертеж, изображенный на рисунке 2а. При таком чертеже решение этой задачи становится очень трудным. Если же к этой задаче сделать чертеж, изображенный на рисунке 2б, то она становится тривиальной.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Чертеж к задаче об объеме треугольной пирамиды*

Решение по рисунку 2б будет таким:

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot b\cdot b=\frac{1}{6}\cdot b^3 \text{ (куб.ед.).}$$

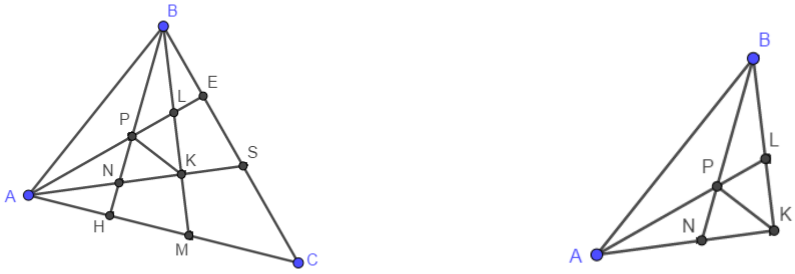
К чертежу следует предъявлять следующие три основных требования: чертеж должен быть верным, наглядным, легко выполнимым.

В методике обучения математике используются два ведущих способа работы с чертежем: реконструкция чертежа, дополнительное построение. Покажем организацию учебно-исследовательской деятельности учащихся на примерах использование этих способов при решении геометрических задач (задачи 3,4).

**Задача 3**. В треугольнике $ABC$ (рис. 3а) проведены трисектрисы углов $A$ и $B$. Доказать, что отрезок $KP$ является биссектрисой угла $AKB$ [3].

Разобраться в столь сложном чертеже не так-то просто. Реконструировав этот чертеж (мы уберем треугольник $MBC$ и треугольник $AKM$), мы получим чертеж, изображенный на рис. 3б.

Легко видеть, что в треугольнике $ABK$ отрезки $AL$ и $BN$ являются соответственно биссектрисами углов $A$ и $B$. По известной теореме о свойстве биссектрис треугольника заключаем, что отрезок $KP$ является биссектрисой угла $AKB$.

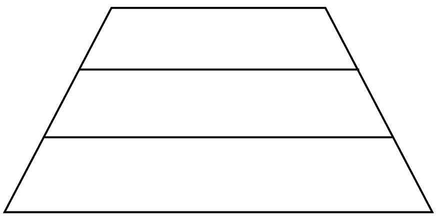



*а)* *б)*

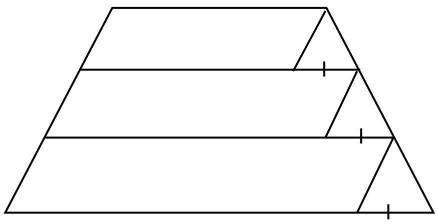
*Рис. 3. Чертеж к задаче 3*

**Задача 4**. Дана трапеция (рис. 4а) с основаниями 2 см и 5 см. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найти длины полученных отрезков [4].

Одно решение этой задачи может быть основано на реконструкции чертежа (мысленно «убирая» ненужные детали чертежа, мы обнаруживаем, что отрезок $MN$ является средней линией трапеции $KBCP$, а отрезок $KP$ – средней линией трапеции $AMND$).



а)



б)

*Рис. 4. Чертеж к задаче 4*

Длины отрезков $MN$ и $KP$ можно найти, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} MN = \dfrac{2+KP}{2}, \\ KP = \dfrac{5+MN}{2}. \end{cases}$$

Другое решение этой же задачи может быть основано на использовании дополнительных построений (через точки $C$, $N$, $P$ проводятся отрезки, параллельные боковой стороне $AB$ заданной трапеции). Легко доказать, что отрезки, отмеченные на чертеже 5б штриховкой, равны. Обозначив длину такого отрезка через $x$, «двигаясь» по чертежу 5б сверху вниз, мы получим последовательность, членами которой являются длины отрезков: 2; $2+x$; $2+2x$; $2+3x$. Из равенства $2+3x=5$ находим $x=1$ см. Осталось лишь найти длины искомых отрезков. Они таковы: $MN = 3$ см ; $KP = 4$ см.

Анализируя предложенные решения, мы видим, что эти решения опирались как на логические размышления, так и на наглядно-образные представления. Последние как раз и позволили учащимся выйти на наиболее простые решения.

Ниже мы рассмотим задачи, в решении которых обучающиеся в основном используют аналитические методы решения, мы же покажем как эти же задачи можно решить, подключив резервы наглядно-образного мышления (задачи 5,6,7).

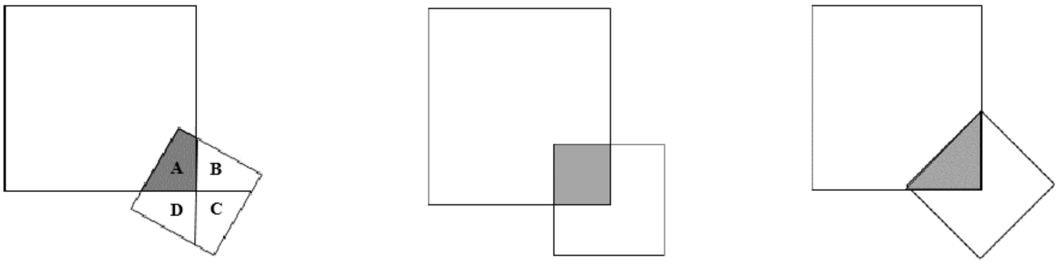
**Задача 5.** Точка пересечения диагоналей квадрата размером 5×5 расположена на вершине квадрата размером 10×10 (рис. 5а): Найти площадь общего участка для данных квадратов [5].

Решение

*Аналитический способ*. Для решения данной задачи нужно решить следующую подзадачу: любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, делит этот параллелограмм на две равные части. Доказательство данной подзадачи оставим читателю.

Согласно утверждению подзадачи можем записать:

$$\begin{cases} A+B=D+C, \\ A+D=B+C. \end{cases}$$




*а)* *б)* *в)*

*Рис. 5. Чертеж к задаче 5*

Произведя преобразования системы, получим: $A=B=C=D$. Откуда следует, что искомая площадь, есть 1/4 часть площади квадрата 5×5, т.е. 6,25 кв.ед.

*Способ, основанный на реконструкции чертежа*. Если нас интересует только ответ, как часто бывает в тестовых заданиях, то мы можем «покрутить» квадрат 5×5 вокруг точки пересечения диагоналей этого квадрата. Получим случаи, показанные на рисунках 5б и 5в. В рензультате приходим к тому же ответу, что и в первом способе решения этой задачи.

**Задача 6.** Дан единичный квадрат (рис.6а). На сторонах $BC$ и $DC$ расположены соответственно точки $P$ и $Q$ так, что $\angle PAQ = 45^0$. Найти периметр треугольника $PQC$ [6].

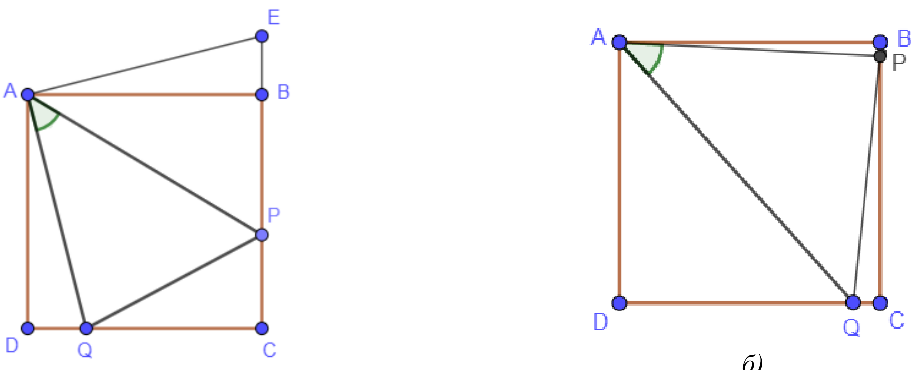
Решение

*Аналитический способ*. Продолжим сторону $BC$ так, что $DQ=BE$. Тогда получим, что $\Delta ADQ = \Delta ABE$ (по двум сторонам и углу между ними). Так как $\angle PAQ=45°$, то $\angle DAQ+\angle BAP = \angle BAE+\angle BAP=\angle EAP=45°$. Значит, $\Delta PAQ=\Delta PAE$ (по двум сторонам и углу между ними), откуда $PQ=PE=BP+BE$.

Периметр треугольника *PQC:*

$$PQ+PC+CQ=BE+BP+PC+CQ=DQ+BP+PC+CQ= = (DQ+CQ) + (BP+PC)=1+1=2.$$

*Способ, основанный на реконструкции чертежа*. Попробуем «оживить» задачу. Точку $Q$ будем смещать к точке $C$ так, чтобы условие задачи сохранилось (рис. 6б). Ясно, что в этом случае точка P будет стремиться к точке B, только в этом случае $\angle PAQ = 45^0$. При этом стороны равнобедренного «треугольника» будут равны: $PQ=1$, $PC=1$, $QC=0$. Искомый периметр равен 2.




*а)* *б)*

*Рис.6. Чертеж к задаче 6*

**Задача 7.** Дан четырехугольник $ABCD$, $\angle BAD=90°$, $\angle BCD=45°$, $\angle ABD=40°$, $AB=6$, $\angle BDC=5°$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$ (рис. 7а) [7].

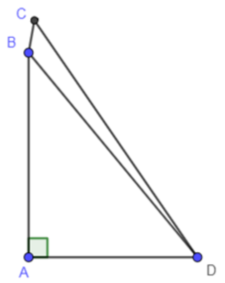
Решение

*Аналитический способ*. Из прямоугольного треугольника $ABD$ имеем:

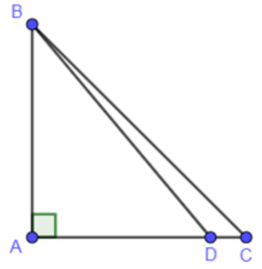
$$tg\angle ABD = \frac{AD}{AB}, \text{ откуда } AD = 6 \cdot tg40°.$$

Значит, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = 18tg40°$. Из ΔABD имеем:

$$cos\angle ABD = \frac{AB}{BD}, \text{ откуда } BD = \frac{6}{cos\,40°}.$$




*а)*




*б)*

*Рис. 7. Чертеж к задаче 7*

Из $\Delta BCD$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{BC}{sin\,5^\circ} = \frac{BD}{sin\,45^\circ},\ \text{откуда}\ BC = \frac{6\,sin\,5^\circ}{sin\,45^\circ \cdot cos\,40^\circ}.$$

значит, $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot BD\, sin \angle CBD = \frac{18\,sin\,5^\circ \cdot sin\,130^\circ}{sin\,45^\circ \cdot cos^2\,40^\circ}$.

$$S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = 18\left(tg40^\circ + \frac{sin\,5^\circ \cdot sin\,130^\circ}{sin\,45^\circ \cdot cos^2\,40^\circ}\right) =$$

$$= 18\left(tg40^\circ + \frac{sin(45^\circ - 40^\circ)}{sin\,45^\circ \cdot cos\,40^\circ}\right) = 18\left(tg40^\circ + \frac{sin\,45^\circ\,cos\,40^\circ - sin\,40^\circ\,cos\,45^\circ}{sin\,45^\circ \cdot cos\,40^\circ}\right) =$$

$$= 18\left(tg40^\circ + \frac{sin\,45^\circ \cdot cos\,40^\circ}{sin\,45^\circ \cdot cos\,40^\circ} - \frac{sin\,40^\circ \cdot cos\,45^\circ}{sin\,45^\circ \cdot cos\,40^\circ}\right) = 18.$$

*Способ, основанный на реконструкции чертежа*. Перевернем треугольник *BCD* так, как показано на рисунке 7б. Из условия задачи находим, что $\angle ADB$=50° и $\angle BDC$=130°, они смежные, следовательно, точки *A, D, C* лежат на одной прямой. $\angle ABC$=40°+5°=45°. Получается, что треугольник *ABC* прямоугольный и равнобедренный, тогда:

$$S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{36}{2} = 18.$$

В наших работах [1,2] читатель найдет много интересных исследовательских задач, которые будут интересны учащимся школ и классов математического профиля, а также рекомендации по работе с чертежом.

**Литература**

1. Далингер В. А. Методика обучения математике. Когнитивно-визуальный подход: учебник для академического бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во Юрайт, 2019. – 340 с. –(Серия : Образовательный процесс).

2. Далингер В. А. Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во Юрайт, 2019. – 338 с. – (Серия : Образовательный процесс).

3. Пуанкаре А. О науке (под ред. Л.С. Понтрягина). – М., Наука, 1990. – 736 с.

4. Lemańska M., Semanišinová I., Soneira Calvo C., Souto Salorio M., TarríoTobarA. Geometrical versus analytical approach in problem solving–an exploratory study. The Teaching of Mathematics. 2014, vol. XVII, 2, Srbije, Beograd.

5. High School Math Contest University of South Carolina December 5, 1987.

6. Math Contest University of South Carolina December 6, 1987.

7.https://puzzling.stackexchange.com/questions/56054/triangle-with-incircle