

квазиклассического приближения к бесконечномерному комплексному квантовому Миру. Именно такими свойствами обладает планковская система констант.

В целом, статья содержит краткое введение в физико-математическое представление и философское осмысление фрагмента теории многомерных пространств, с выводом о том, что планковская система констант может быть дополнена планковской объемной скоростью.

Список литературы

1. Витко А.В. Комплементарность. Физика, математика, философия: монография. – СПб: 2019. – 160 с.
2. Витко А.В. Объемные свойства многомерных объектов. – Ежемесячный международный научный журнал «Интерактивная наука». Выпуск 8 (42). – 8 с.
3. Манин Ю. И. Математика и физика. – М.: «Знание», 1979. – 64 с.
4. Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие вселенной: полный путеводитель. Пер. с англ. А.Р. Логунова и Э.М. Эпштейна – Москва-Ижевск: 2007. – 911 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ТЕПЛООБМЕНОМ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ КРАНКА-НИКОЛСОНА

Лобаев Александр Николаевич

кандидат физико-математических наук,
доцент

Вдовин Сергей Иванович

кандидат технических наук,
доцент

Харитоновна Ирина Юрьевна

кандидат технических наук,
доцент

Богословская Надежда Матвеевна

кандидат технических наук,
доцент

Дзержинский политехнический институт НГТУ
г. Дзержинск

INVESTIGATION OF THE HEAT EQUATION WITH HEAT EXCHANGE AT THE BORDER BY THE CRANK-NICOLSON METHOD

Lobayev A. N.

candidate of physical and mathematical sciences,
Associate Professor,

Vdovin S. I.

candidate of technical sciences,
Associate Professor

Kharitonova I. Yu.

candidate of technical sciences,
Associate Professor

Bogoslovskaya Nadezhda Matveevna

candidate of technical sciences,
Associate Professor

Dzerzhinsk Polytechnical Institute of NSTU
с. Dzerzhinsk

Аннотация

Рассматривается одномерное уравнение теплопроводности при наличии теплообменом на поверхности. Показано, что для численного решения можно использовать метод Кранка-Николсона, при этом погрешность аппроксимации разностной схемы остается прежней, а сходимость только усиливается. Погрешность аппроксимации во внутренних точках области равномерно стремится к нулю, но при приближении к границе достаточно быстро осциллирует, что связано с неточностью аппроксимации по координате второй производной.

Abstract

The heat conduction equation with heat transfer on the boundary is considered. It is shown that a six-point difference scheme of the Crank-Nicholson method can be used for the numerical solution. The aim of the work was to modify the Crank-Nicholson scheme so that it could be applied to the original heat conduction equation, and to study its inaccuracy and convergence. The study of the convergence of the scheme differences was carried

out directly by the computer and illustrated in the graphs. The question of the stability of a difference scheme was studied by the method of harmonics.

Ключевые слова: Математическая модель, уравнения параболического типа, уравнение теплопроводности, теплообмен на границе, смешанная задача, численные методы, шести точечная разностная схема, погрешность аппроксимации, устойчивость разностной схемы.

Keywords: Mathematical model, parabolic equation, heat equation, boundary heat transfer, mixed problem, numerical methods, six-point difference scheme, approximation error, stability of a difference scheme.

В современных физических экспериментах электрические измерения можно проводить с такой точностью, что становится возможным применять малые разности температур и устранять ошибки, вызываемые зависимостью электропроводности и теплопроводности от температуры. Кроме того при рассмотрении отношения коэффициентов электро- и теплопроводности (отношение Видемана-Франца [1]) желательно, чтобы обе эти величины определились в одном и том же эксперименте.

Физические модели этих экспериментов приводят к изучению процесса переноса тепла в длинном тонком стержне по которому течет электрический ток. Стержень при этом предполагается настолько тонким, что температуру во всех точках поперечного сечения можно считать одинаковой.

Математическая модель этой задачи сводится, таким образом, к задаче линейного теплового потока, в которой температура определяется временем и расстоянием x измеряемым вдоль стержня.

Предположим, что стержень имеет постоянную площадь поперечного сечения S , периметр сечения P , коэффициент теплопроводности λ , плотность вещества ρ , удельную теплоемкость c и коэффициент теплообмена H . Пусть стержень расположен вдоль оси x и рассмотрим элемент объема, ограниченный сечениями, проходящими через x и $x + \Delta x$ перпендикулярно оси стержня.

Количество тепла, поступающее в этот элемент в единицу времени через сечение проходящее через точку x , равно

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} S,$$

где u – температура в точке x в момент времени t .

Количество тепла, уходящее в единицу времени через сечение $x + dx$ равно

$$\left(-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) S.$$

Приращение количества тепла в элементе объема в единицу времени, обусловленное потоком тепла через оба сечения равно

$$S \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Количество тепла, теряемое в единицу времени вследствие теплообмена на боковой поверхности элемента объема со средой, равно

$$H(u - \theta) P dx,$$

где θ – температура окружающей среды.

Количество тепла, выделяемое на длине dx током I , будет равно

$$\frac{I^2}{s \delta_0} dx (1 + \alpha u),$$

где δ_0 – электропроводность при нулевой температуре, а $\alpha = 1/273$ – числовой коэффициент.

Полный прирост количества тепла в единицу времени в элементе объема равен

$$S dx \rho c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Таким образом, получим уравнение [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{H P}{c \rho S} (u - \theta) + \frac{I^2}{c \rho S^2 \delta_0} (1 + \alpha u). \quad (1)$$

Будем считать температуру на краях стержня постоянной и равной $u(0, t) = T_1$, $u(l, t) = T_2$. Начальное распределение температуры в стержне $u(x, 0)$ задается функцией $\varphi(x)$, которая удовлетворяет условиям согласованности $\varphi(0) = T_1$, $\varphi(l) = T_2$.

Будем измерять температуру стержня в единицах $\theta = \frac{l^2 I_0}{\lambda \delta_0 S^2}$, где l – длина стержня. Ток измеряем в единицах I_0 , а $I = I_0 \cdot I_{st}$ – безразмерная величина силы тока (I_0 – величина силы тока в амперах).

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu(u - \frac{\theta}{\theta}) + (1 + \beta u)I^2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{где } \mu = \frac{H \nu c \rho l^2}{\lambda S}, \beta = \frac{1}{273} \frac{l^2 I_0}{\lambda \delta_0 S^2}.$$

Делая простейшие алгебраические преобразования, получим следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + a = \frac{\partial u}{\partial t} & t > 0, 0 < x < l \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \frac{T_1}{\theta} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u(l, t) = \frac{T_2}{\theta} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{Здесь } b = \beta I_{st}^2 - \mu, a = \frac{\mu \theta}{\theta} + I_{st}^2.$$

Следует отметить, что величина a всегда неотрицательна, а величина b может принимать значения из трех интервалов: $b = 0$, $b < 0$, $b > 0$.

На практике чаще всего встречается $b < 0$. Именно этот случай нас будет интересовать.

Данная смешанная задача имеет точное решение, причем, если функция $\varphi(x)$ имеет достаточно простой вид, например, если

$$\varphi(x) = x \frac{T_2}{\theta} + (1 - x) \frac{T_1}{\theta} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

то все интегралы вычисляются до конца и получаем

$$U(x, t) = \frac{\left(\frac{T_2}{\theta} + \frac{a}{b}\right) g(x) + \left(\frac{T_1}{\theta} + \frac{a}{b}\right) g(1-x)}{g(1)} - \frac{a}{b} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-[(n\pi)^2 - b]t} f(x) \cdot \left\{ \left[(-1)^n \frac{T_2}{\theta} - \frac{T_1}{\theta} \right] b + a [(-1)^n - 1] \right\}, \quad (5)$$

где $g(x) = sh(\sqrt{-b} \cdot x)$, $f(x) = \frac{sin(n\pi x)}{(n\pi)^3 - b \cdot (n\pi)}$, учитывая, что $b < 0$.

Смешанную задачу (3.1) – (3.4) также можно решать методом конечных разностей.

Существует много различных вариантов построения разностных аппроксимаций уравнения параболического типа.

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (6)$$

Чаще всего используется шести точечная разностная схема Кранка-Николсона [3]. Существенным отличием уравнения (3.1) от классического уравнения (6), является присутствие в уравнении (3.1) линейного слагаемого bu .

Наша цель модифицировать схему Кранка-Николсона так, чтобы ее можно было применять для уравнения (3.1) и исследовать ее погрешность и сходимости.

Для построения разностной схемы введем сетку в области изменения независимых

переменных и зададим шаблон, то есть множество точек сетки участвующих в аппроксимации дифференциального выражения (3.1). Введем сетку по переменному x

$$\Omega_h = \{ x_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots, N, Nh = 1 \}$$

и сетку по переменному t

$$\omega_\tau = \{ t_i = i\tau, i = 0, 1, 2, \dots, M, M\tau = T \}.$$

Точки (x_k, t_i) , $k = 0, 1, 2, \dots, N$; $i = 0, 1, 2, \dots, M$ образуют узлы пространственно-временной сетки

$$\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau \text{ (см. рис. 1).}$$

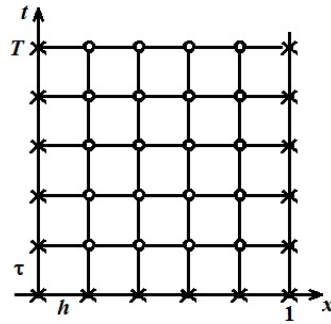


Рис. 1. Пространственно-временная сетка

Узлы (x_k, t_i) , принадлежащие отрезкам

$$L_0 = \{0 \leq x \leq 1, t = 0\}, L_1 = \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}, L_2 = \{x = 1, 0 \leq t \leq T\}$$

назовем граничными узлами сетки $\Omega_{h,\tau}$, а остальные узлы – внутренними. На рис. 1 граничные узлы обозначены крестиками, а внутренние кружочками.

Слоем будем называть множество всех узлов сетки $\Omega_{h,\tau}$, имеющих одну и ту же координату. Так i -м слоем называется множество узлов

$$(x_0, t_i), (x_1, t_i), (x_2, t_i) \dots (x_N, t_i) \tag{7}$$

Для того чтобы аппроксимировать уравнение (3.1) в точке $(x_k, t_i + \frac{\tau}{2})$, которая находится между слоями $(x_0, t_{i+1}) \dots (x_N, t_{i+1})$ и $(x_0, t_i) \dots (x_N, t_i)$ введем шаблон изображенный на рис. 2 и состоящий из шести узлов

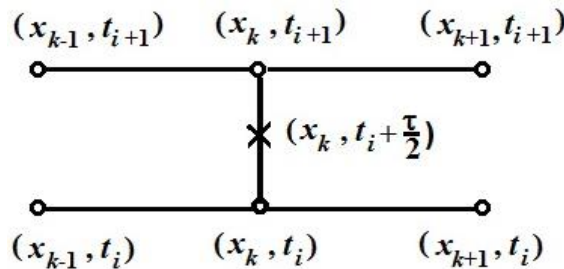


Рис. 2. Шаблон схемы Кранка-Николсона

Для функции $y(x, t)$, являющейся численным аналогом функции $u(x, t)$ и определенной на сетке $\Omega_{h,\tau}$, введем обозначения:

$$\begin{aligned} y_k^i &= y(x_k, t_i); \\ y_t(x_k, t_i + \frac{\tau}{2}) &= \frac{y_k^{i+1} - y_k^i}{\tau}; \\ y_{xx}(x_k, t_i + \frac{\tau}{2}) &= \frac{1}{2h^2} (y_{k-1}^{i+1} - 2y_k^{i+1} + y_{k+1}^{i+1} + y_{k-1}^i - 2y_k^i + y_{k+1}^i) \\ u(x_k, t_i + \frac{\tau}{2}) &= \frac{1}{2} (y_k^{i+1} + y_k^i). \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив эти формулы в уравнение (3.1 – (3.1) во всех внутренних узлах сетки и (3.4), получим совокупность разностных уравнений дополнительные (начальные и граничные) условия аппроксимирующих дифференциальное уравнение – в граничных узлах сетки.

$$\begin{aligned} \frac{y_k^{i+1} - y_k^i}{\tau} &= \frac{1}{2h^2} [y_{k-1}^{i+1} - 2y_k^{i+1} + y_{k+1}^{i+1} + y_{k-1}^i - 2y_k^i + y_{k+1}^i] + \frac{b}{2} [y_k^{i+1} + y_k^i] + a, \\ \text{где } k &= 1, 2, \dots, N-1; i = 0, 1, \dots, M-1; h \times N = 1, M \times \tau = T; \\ y_0^i &= \frac{T_1}{\theta}, y_N^i = \frac{T_2}{\theta}, i = 0, 1, \dots, M; \\ y_k^0 &= \phi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{9}$$

Совокупность разностных уравнений в литературе обычно называют разностной схемой или разностной задачей.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} y_0^{i+1} = \frac{T_1}{\theta} \\ \gamma \cdot y_{k-1}^{i+1} + (-\varphi - 1) \cdot y_k^{i+1} + \gamma \cdot y_{k+1}^{i+1} = -\gamma \cdot y_{k-1}^i + (\varphi - 1) \cdot y_k^i - \gamma \cdot y_{k+1}^i - \tau \cdot a \\ y_N^{i+1} = \frac{T_2}{\theta} \end{cases} \quad (10)$$

где $k = 1, 2, \dots, N - 1, i = 0, 1, \dots, M - 1$.

Находить решение этой системы следует по слоям. Решение на нулевом слое задано начальными условиями $y_k^0 = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Если решение $y_k^i, i = 0, \dots, M$ на i -ом слое известно, то решение y_k^{i+1} на $i+1$ -ом слое можно найти из решения системы (10). Матрица этой системы имеет трёхдиагональный вид, а ее определитель всегда отличен от нуля.

$$\gamma = \frac{\tau}{2h^2}, \varphi = 2\gamma - \frac{\tau b}{2}.$$

Разностная схема представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных:

Следовательно, система всегда имеет единственное решение.

Точное решение разностной схемы (9) отличается от точного решения смешанной задачи (3.1 – 3.4), (5) на величину $z_k^i = y_k^i - u(x_i, t_i)$, которая называется погрешностью разностной схемы [3].

Подставляя $y_k^i = u(x_i, t_i) + z_k^i$ в (9), получим уравнение для погрешности:

$$\begin{aligned} \frac{z_k^{i+1} - z_k^i}{\tau} = \frac{1}{2h^2} [z_{k-1}^{i+1} - 2z_k^{i+1} + z_{k+1}^{i+1} + z_{k-1}^i - 2z_k^i + z_{k+1}^i] + \\ + \frac{b}{2} [z_k^{i+1} + z_k^i] + \psi_k^i, \end{aligned} \quad (11)$$

где ψ_k^i погрешность аппроксимации разностной схемы (9) на решении задачи (3.1 – 3.4). Погрешность ψ_k^i определяется функцией

$$\begin{aligned} \psi_k^i = -\frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} + \frac{1}{2h^2} [u_{k-1}^{i+1} - 2u_k^{i+1} + u_{k+1}^{i+1} + u_{k-1}^i - 2u_k^i + u_{k+1}^i] + \\ + \frac{b}{2} [u_k^{i+1} + u_k^i] + a. \end{aligned} \quad (12)$$

Оценим ψ_k^i , раскладывая правую часть (12) в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_k, t_i + \frac{\tau}{2})$ по степеням h и τ . В результате получим

$$\psi_k^i = \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad (13)$$

где производные вычисляются в точке $(x_k, t_i + \frac{\tau}{2})$.

Формула (13) показывает, что погрешность аппроксимации ψ_k^i для уравнения (3.1) имеет такой же вид как и для классического уравнения теплопроводности без теплообмена на поверхности [3].

Зависимость ψ_k^i от h и τ можно прояснить также, подставляя точное решение (5) в формулу (12).

Графики $\psi_k^i(\tau), h = \text{const}$ и $\psi_k^i(h), \tau = \text{const}$ (рис. 3), как легко можно заметить, имеют вид парабол.

Рассмотрим вопрос устойчивости разностной схемы (9). Будем это делать методом гармоник [3], который достаточно часто применяется для исследования разностных схем с постоянными коэффициентами. Хотя данный метод не является достаточно обоснованным, так как не учитывает влияние граничных условий, он позволяет легко находить необходимые условия устойчивости и сходимости разностных схем.

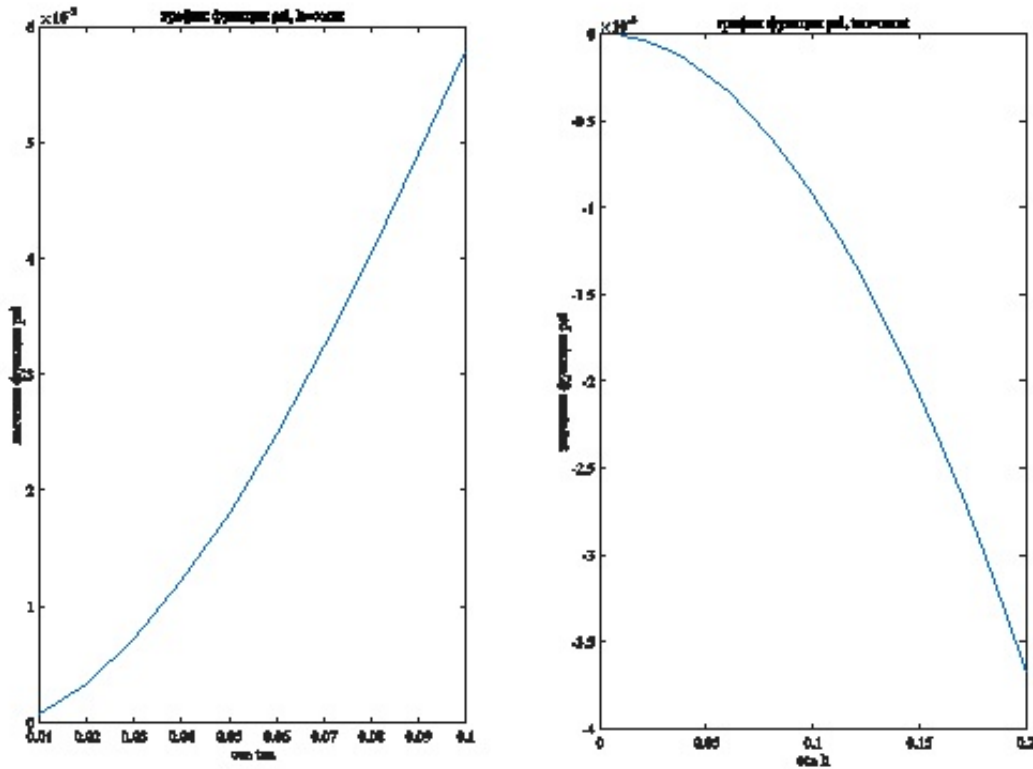


Рис. 3. График функции $\psi(\tau, h)$ для $h = const$ и $\psi(\tau, h)$ для $\tau = const$

Будем искать частные решения уравнения (9) в виде

$$y_k^n = q^n \cdot e^{ikh \cdot \alpha}, \tag{14}$$

где $i^2 = -1$, α – любое число и q – число, подлежащее определению.

Подставляя y_k^n в уравнение (9) при $a = 0$ получим

$$q - 1 = 2\gamma(q + 1)(\cos(h\alpha) - 1) + \frac{b}{2}(q + 1)(q + 1). \tag{15}$$

Разрешая это уравнение относительно q , получим

$$q = \frac{1 + \frac{b}{2} - 4\gamma \sin^2 \frac{h\alpha}{2}}{1 - \frac{b}{2} + 4\gamma \sin^2 \frac{h\alpha}{2}}, \quad b < 0. \tag{16}$$

Видно, что при всех значениях α величина $q < 1$ и наличие $b < 0$ только усиливает это неравенство, по отношению к классическому уравнению теплопроводности ($b = 0$). Для того чтобы исследовать сходимость разностной схемы (9), надо оценить решение z_k^i уравнения (11) через правую часть ψ_k^i и показать, что схема (9) сходится со вторым порядком по h и τ . Мы поступим проще, будем напрямую вычислять погрешность $z_k^i = y_k^i - u(x_k, t_i)$, используя формулу (5) и решая систему (10) с помощью пакета MathLab.

По результатам расчетов можно сделать вывод, что z_k^i при уменьшении шага по времени равномерно стремится к нулю. Это говорит о том, что решение разностной схемы (9) сходится к точному решению краевой задачи.

При уменьшении шагов по координате и времени z_k^i во внутренних точках равномерно

стремится к нулю, а вблизи граничных точек достаточно сильно возрастает. Это связано, по-видимому, с неточностью аппроксимации второй производной в неявной схеме Кранка-Николсона в приграничных точках.

Из проведенного исследования следует, что задачу (3.1 – 3.4) можно сразу решать численно используя схему Кранка-Николсона, не преобразуя уравнение (3.1) стандартными методами к классическому уравнению теплопроводности.

Список литературы

1. Абрикосов А. А. Основы теории металлов.- М.: Наука, 1987.-С. 32
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.-С.154-156.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики.- М.: Научный мир, 2003.-С 43-52.