ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Турешбаев Абдильда Турешбаевич
кандидат физико-математических наук
Кызылординский государственный
университет имени Коркыт Ата
г.Кызылорда
Омарова Улбосын Шаихиевна
кандидат технических наук
Университет Туран
г.Алматы
DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2019.3.50.124

SUSTAINABILITY OF COLLINEAR LIBRATION POINTS IN A SPATIAL GENERALIZED THREE-BODY PHOTOGRAVITATION PROBLEM WITH RESONANCE OF THIRD ORDER

Tureshbaev Abdilda Tureshbaevich
Candidate of physical and mathematical sciences
Kyzylorda State Korkyt Ata University
Kyzylorda city
Omarova Ulbossyn Shaikhievna
Candidate of technical sciences
University of Turan
Almaty city

Аннотация
Изучается устойчивость облачных скоплений газопылевых частиц в поле двойных звездных систем. В качестве динамической модели рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел с двумя излучающими массами. Исследуется устойчивость коллинеарных точек либрации в пространственной задаче при резонансе третьего порядка.
Abstract
The stability of cloud clusters of gas and dust particles in the field of binary stellar systems is studied. As a dynamic model, the photogravitational limited three-body problem with two radiating masses is considered. The stability of collinear libration points in a spatial problem with a third-order resonance is investigated.
Ключевые слова: устойчивость; поле; фотогравитация; либрации
Keywords: sustainability; field; photogravitation; libration

Движение частицы $P(x, y, z)$ пренебреженно малой массы будем изучать в поле двух гравитирующих и одновременно излучающих тел S_1 и S_2, считаемых материальными точками, и, обращающихся друг относительно друга по кеплеровой орбите. Начало O прямоугольной системы координат $Oxyz$ поместим в центр масс основных тел; ось Ox направим вдоль прямой, соединяющей основные тела, а ось Oz – перпендикулярно плоскости их орбитального движения в сторону, откуда вращение видно происходящих против хода часовой стрелки. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс основных тел S_1 и S_2 примем за единицу массы, расстояние между ними – за единицу длины, отношение T/2π - за единицу времени (где T- период обращения основных тел). Тогда движение частицы задается каноническими уравнениями

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, (i = 1,2,3) \qquad (1)$$

где $\bar{q}_i$ суть декартовые координаты частицы $P(x, y, z)$, $\bar{p}_i$- соответствующие канонические импульсы, а $H(x, y, z, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ - аналитическая функция Гамильтона относительно координат и импульсов, которая в нашем случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2) + (\bar{p}_1 y - \bar{p}_2 x) - Q_1(1-\mu)/R_1 - Q_2\mu/R_2,$$
$$R_\alpha = \sqrt{(x - x_\alpha)^2 + y^2 + z^2}, (\alpha = 1,2) \qquad (2)$$

Здесь Q_1 и Q_2 - коэффициенты редукции масс основных тел, которые для коллинеарных точек могут принимать как положительные, так и отрицательные значения [1].

Исследуем устойчивость КТЛ в предположении, что орбита основных тел круговая, а частица P бесконечно малой массы в начальный момент времени испытывает начальные возмущения, выводящие ее из плоскости вращения основных тел S_1 и S_2.

В уравнения (1) вводим возмущения по формулам

$$x = x^* + q_1, y = q_2, \ z = q_3, \ \bar{p}_1 = \bar{p}_1^* + p_1, \bar{p}_2 = p_2, \ \ \bar{p}_3 = p_3$$
$$p_1{}^* = x^*, \ \ p_2{}^* = y^* = p_3{}^* = z_0^* = 0. \tag{3}$$

где

$$x^* = 0{,}5(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1) - \mu, \qquad \bar{p}_1^* = \mp 0{,}5\sqrt{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) - 1}. \tag{4}$$

Раскладывая функцию Гамильтона в ряд по степеням возмущений q_iи p_i в окрестности рассматриваемой коллинеарной точки, принимаемой за начало координат, получим

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{5}$$

Здесь H_m- однородные полиномы степени m $(m = 2,3,4,\ldots)$ относительно обобщенных координат q_i и импульсов p_i, так что

$$H_m = \sum\nolimits_{\nu+l=m} h_{\nu_1\nu_2\nu_3l_1l_2l_3} \cdot q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} q_3^{\nu_3} p_1^{l_1} p_2^{l_2} p_3^{l_3} \tag{6}$$

Тогда в выражении (5) формы H_2, H_3 и H_4 с учетом (3) примут следующий вид:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1q_2 - p_2q_1 + h_{200}q_1^2 + h_{020}q_2^2 + h_{002}q_3^2 + h_{110}q_1q_2 +$$
$$+ h_{101}q_1q_3 + h_{011}q_2q_3, \tag{7}$$

$$H_3 = h_{300}q_1^3 + h_{030}q_2^3 + h_{300}q_3^3 + h_{210}q_1^2q_2 + h_{201}q_1^2q_3 +$$
$$+ h_{120}q_1q_2^2 + h_{021}q_2^2q_3 + h_{102}q_1q_3^2 + h_{012}q_2q_3^2 + h_{111}q_1q_2q_3, \tag{8}$$

$$H_4 = h_{400}q_1^4 + h_{040}q_2^4 + h_{004}q_3^4 + h_{310}q_1^3q_2 + h_{130}q_1q_2^3 +$$
$$+ h_{103}q_1q_3^3 + h_{301}q_1^3q_3 + h_{031}q_2^3q_3 + h_{013}q_3^3q_2 + h_{211}q_1^2q_2q_3 +$$
$$+ h_{121}q_1q_2^2q_3 + h_{112}q_1q_2q_3^2 + h_{220}q_1^2q_2^2 + h_{202}q_1^2q_3^2 + h_{022}q_2^2q_3^2, \tag{9}$$

где

$$h_{200} = -8a, h_{020} = 4a, h_{002} = 4a, h_{110} = 0, h_{101} = 0, h_{011} = 0$$
$$h_{300} = 16b, h_{120} = -16b, h_{102} = -16b, h_{030} = 0, h_{003} = 0, h_{210} = 0,$$
$$h_{201} = 0, h_{021} = 0, h_{012} = 0, h_{111} = 0, \tag{10}$$
$$h_{400} = -32c, h_{040} = -12c, h_{004} = -12c, h_{220} = 32c, h_{202} = 32c,$$
$$h_{022} = -8c, h_{310} = 0, h_{130} = 0, h_{103} = 0, h_{301} = 0, h_{031} = 0,$$
$$h_{013} = 0, h_{211} = 0, h_{121} = 0, h_{112} = 0,$$
$$a = \frac{Q_1(1-\mu)}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1|^3} + \frac{Q_2\mu}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1|^3},$$
$$b = \frac{Q_1(1-\mu)(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1)}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1|^5} + \frac{Q_2\mu(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1)}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1|^5}, \ (11) \ c = \frac{Q_1(1-\mu)}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1|^5} + \frac{Q_2\mu}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1|^5}$$

Вопрос об устойчивости исследуемых пространственных коллинеарных точек сводится к задаче об устойчивости положений равновесия $q_i = p_i = 0$ (i=1,2,3) автономной гамильтоновой системы с тремя степенями свободы. Как видно из (7), здесь имеем случай, когда H_2 не является знакоопределенной функцией, а характеристическое уравнение системы не имеет корней с ненулевой вещественной частью. Следовательно, из устойчивости линейной системы не следует устойчивость полной системы.

Раскладывая функцию Гамильтона в ряд по степеням q_i, p_i в окрестности рассматриваемого положения равновесия, сначала гамильтониан H_2приводим к нормальной форме в виде

$$K_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3. \tag{12}$$

Структура нормальных форм H_3 и H_4 зависит от вида резонансного соотношения

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0, (|k_1| + k_2 + |k_3| \le 4), \quad (13)$$

где частоты главных колебаний ω_i для рассматриваемых точек либрации равны

$$\omega_1 = \sqrt{\left(2 - \mathrm{a} + \sqrt{(9a-8)\mathrm{a}}\right)/2}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(2 - \mathrm{a} - \sqrt{(9a-8)\mathrm{a}}\right)/2}, \quad .\ \omega_3 = \sqrt{\mathrm{a}} \quad . \quad (14)$$

Исследуем устойчивость коллинеарных точек либрации при двухчастотных резонансах. Для коллинеарных точек либрации возможными оказались следующие двухчастотные резонансы: $\omega_1 = 2\omega_2, \omega_1 = 3\omega_2, 2\omega_1 = \omega_3, 3\omega_1 = \omega_3,$ $2\omega_2 = \omega_3, 3\omega_2 = \omega_3.$

Резонансы $\omega_1 = 2\omega_2$и $\omega_1 = 3\omega_2$, обнаруженные в плоской задаче, были изучены в работах [2.3]. В пространственной фотогравитационной задаче возможными оказались резонансы третьего и четвертого порядков

$2\omega_1 = \omega_3, 2\omega_2 = \omega_3,\ 3\omega_1 = \omega_3, 3\omega_2 = \omega_3.$

Заметим, что два последних резонанса $3\omega_1 = \omega_3$и $3\omega_2 = \omega_3$совпадают. Для построения резонансных кривых (в области устойчивости в линейном приближении системы) для соответствующего конкретному резонансному значения коэффициента ***a*** строится кривая, определяемая выражением

$$\frac{Q_1(1-\mu)}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1|^3} + \frac{Q_2\mu}{|Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1|^3} = a.$$

При резонансе $2\omega_1 = \omega_3$ (в котором не участвует частота плоских колебаний), которому отвечает значение параметра $a = 4(1 + 2\sqrt{7})\ /\ 27$, нормализованный гамильтониан примет вид [4]

$$H = 2\omega_1 r_1 - \omega_1 r_3 + A(\omega_1, \omega_3) r_3 \sqrt{r_1}\, sin(\phi_1 + 2\phi_3) + O((r_1 + r_3)^2), \quad (15)$$

где $A(\omega_1, \omega_3) = -\sqrt{\omega_1 (x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}$, а коэффициенты x_{1002} и y_{1002} имеют вид

$$x_{1002} = -\frac{\omega_1 h_{0111}}{2\omega_1} - \frac{h_{1002}}{2} + \frac{h_{1200}}{2\omega_1^2}, y_{1002} = -\frac{\omega_1 h_{0012}}{2} + \frac{\omega_1 h_{0210}}{2\omega_1^2} + \frac{h_{1101}}{2\omega_1},$$

которые для коллинеарных точек принимают значения

$$x_{1002} = -\frac{h_{1200}}{2\omega_1^2}, y_{1002} = 0, \quad (16)$$

следовательно выражение

$$A(\omega_1, \omega_3) = -\sqrt{\omega_1 (x_{1002}^2 + y_{1002}^2)} = -\sqrt{\omega_1}\ x_{1002},$$

нигде в нуль не обращается, следовательно по теореме Арнольда - Мозера при резонансе третьего порядка из области устойчивости в первом приближении коллинеарные точеки либрации неустойчивы.

Список литературы

1. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. On the collinear libration points in the photogravitational three-body problem. Celestial Mechanics. 1985. V. 35. P. 105-112.

2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.:Наука, 1978. 312 с.

3. Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел при внутреннем резонансе четвертого порядка //ПММ.2012. Т.76. Вып.4. С.610-615.

4. Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации при внутреннем резонансе третьего порядка //АиТ. 2011. №9. 121126.