информацию из нескольких разделов физики в сочетании с электроникой. В результате возникают глубокие ассоциации, способствующие длительному хранению в нашей памяти воспринимаемой информации. Использование электронного конструктора в опытах классической физики имеет и другое, пожалуй, самое важное значение: электронный конструктор, будучи незамкнутой системой, побуждает обучаемых к творчеству, к выбору самостоятельных технических решений. Союз такой открытой доступной электроники в сочетании с физикой очень продуктивен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agafontzew Walerij W, Achmedjanov Walerij W, Worobjew Alexandr N, Tarasov Vladimir M. "Didaktishe Modelle in der universitären elektrotechnischen Ausbildung" (2nd International Scientific Conference ″Europen Applied Sciences: modern approaches in scientific researches″, February 18-19, 2013), ORT Publishing, Stuttgart, Germany, pp. 5-7.

2. Ахмедьянов В.В. "Физический эксперимент через интернет?! ДА!!!" // Учебная физика.-2007. - № 1.- С. 131-134.

3. Агафонцев В.В, Ахмедьянов В.В, Воробьёв А.Н, Симаков В.В, Тарасов В.М. "Удалённый доступ в физическом и технологическом эксперименте" // Учебная физика.-2008. - № 1.- С. 124-129.

ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЧЛЕНОВ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2019.3.50.121

Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.Ю., Эфендиев Э.И

.

Для непрерывной на некотором отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$, как обычно, положим:

$$\|f\| = max\{|f(x)|: x \in [a,b]\}.$$

Для произвольной функции норма её производной никак не связана с нормой самой функции. Это оказалось не так для многочленов, как тригонометрических, так и алгебраических. Сначала С.Н. Бернштейн показал, [1]что для тригонометрического многочлена $u_n(t)$ порядка n на $[a,b] = [0,2\pi]$: $\|u_n'\| \le n\|u_n\|$ и, как следствие, для алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени n на отрезке $[-1,1]$ для $x \in (-1,1)$ имеем

$$\|P_n'(x)\| \le \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|P_n\|. \qquad (1)$$

Классический результат А.А. Маркова, [2]:

$$\|P_n'\| \le n^2\|P_n\|.$$

Эти неравенства обобщались в различных направлениях. Отметим некоторые из работ, посвященных оценкам норм производных многочленов, [3]-[8].

На наш взгляд, представляет интерес задача получения оценок типа (1) в зависимости от расположения точки *x* на всей числовой прямой.

В данной статье мы установим некоторые общие результаты. Применить их к алгебраическим многочленам планируем в другой работе.

Пусть $\phi_0(t),\dots,\phi_n(t)$ - линейно независимая система дифференцируемых функций, определенных на некотором отрезке $[a,b]$; положим $V(t) = (\phi_0(t),\dots,\phi_n(t))$ и для $x \in R^{n+1}$ определим многочлен $P(t) = x \cdot V(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i\phi_i(t)$.

Фиксируем точку $\bar{t} \in R$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$xV'(t) \to extr,$$
$$\|xV(t)\| \le 1. \qquad (2)$$

Те $x \in R^{n+1}$, которые удовлетворяют неравенству (2), называются допустимыми точками задачи; заметим, множество допустимых точек непусто (например,x=0), замкнуто, выпукло и симметрично. Последнее означает, что наряду с x и $-x$ является допустимой точкой. Это позволяет ограничиться изучением свойств задачи

$$xV'(t) \to min,$$
$$\|xV(t)\| \le 1, \qquad (3)$$

являющейся задачей выпуклого программирования с условием Слейтера, [9].

Теорема 1. Допустимая точка $\tilde{x} \in R^{n+1}$ будет решением задачи (3) тогда и только тогда когда существуют:

- натуральное число r,
- точки $t_1 <\dots< t_r$ отрезка $[a,b]$,
- числа $c_1,\dots,c_r$, обладающие свойствами:

$$|\tilde{x}V(t_i)| = 1, i = 1,\dots,r, \qquad (1.1)$$

$$Signc_i = -\tilde{P}(t_i), i = 1,\dots,r \qquad (1.2)$$

и для любого $x \in R^{n+1}$:

$$x \cdot V'(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i xV(t_i). \qquad (1.3)$$

Доказательство сводится к применению теоремы Куна-Таккера. Пусть для $g(x) = max\{|xV(t)| - 1: t \in [a,b]\}$ и для $\lambda > 0$ $L_\lambda(x)$ - функция Лагранжа:

$$L_\lambda(x) = xV'(\bar{t}) + \lambda g(x).$$

Утверждение о том, что $\tilde{x}$ есть решение задачи равносильно условию $0 \in \partial L_\lambda(\tilde{x})$, где $\partial f(x)$ означает субдифференциал, [9] функции $f(x)$.

Очевидно,

$$\partial L_\lambda(\tilde{x}) = V'(\bar{t}) + \lambda\, \partial g(\tilde{x}).$$

Известно, [9], что

$$\partial g(\tilde{x}) = \{y \in R^{n+1}\colon y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i z_i V(t_i)\,, \alpha_i > 0, \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1, z_i = sign(\tilde{x}V(t_i))\}.$$

Теперь считаем $\alpha_i \lambda z_i = -c_i, i = 1, \ldots, r$. Тогда условие $0 \in \partial L_\lambda(\tilde{x})$ равносильно условиям:

$$V'(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{c}_i V(t_i),$$

что совпадает с утверждением (1.3) теоремы:

$$sign\mathrm{c}_i = -sign(\tilde{x}V(t_i)), i = 1, \ldots, r$$

и

$$|\tilde{x}V(t_i)| = 1, i = 1, \ldots, r.$$

Теорема доказана.

Значение r связано с возможностью равенства (1.3). Докажем вспомогательную лемму

Лемма. Если система $\phi_0(t), \ldots, \phi_n(t)$ и ее подсистема $\phi_0(t), \ldots, \phi_{n-1}(t)$ являются чебышевскими, [10], то равенство (1.3) возможно только при $r \geq n$.

Доказательство. Допустим утверждение неверно и $r \leq n - 1$. Если $r < n - 1$, то добавим к имеющимся точкам $t_1, \ldots, t_r$ произвольные точки $t_{r+1}, \ldots, t_{n-1}$ и положим $c_i = 0$ для $i \geq r + 1$.Тогда

$$xV'(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{c}_i xV(t_i). \qquad (*)$$

Для некоторого $\tau \in [a, b]$ рассмотрим многочлен

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} \phi_0(t_1) & \ldots & \phi_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(t_{n-1}) & \ldots & \phi_n(t_{n-1}) \\ \phi_0(\tau) & \ldots & \phi_n(\tau) \\ \phi_0(t) & \ldots & \phi_n(t) \end{vmatrix}.$$

Считаем $\tau \neq t_i, i = 1, \ldots, n - 1$.

Так как для чебышевской системы определитель

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} \phi_0(t_1) & \ldots & \phi_{n-1}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(t_{n-1}) & \ldots & \phi_{n-1}(t_{n-1}) \\ \phi_0(\tau) & \ldots & \phi_{n-1}(\tau) \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то $\Phi(t) \not\equiv 0$и $\Phi(t_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n - 1$; $\Phi(\tau) = 0$.

Если $\bar{t} \in \{t_i\}$, то тогда $\Phi'(\bar{t}) \neq 0$. Пусть $\bar{t} \notin \{t_i\}$. Тогда берем $\tau = \bar{t}$ и опять получим $\Phi'(\bar{t}) \neq 0$ - что противоречит равенству (*), если за x взять коэффициенты многочлена $\Phi(t)$.

Сформулируем основной результат, который фактически является следствием доказанных теоремы и леммы.

Теорема 2. Пусть система $\phi_0(t), \ldots, \phi_n(t)$ и ее подсистема $\phi_0(t), \ldots, \phi_{n-1}(t)$ являются чебышевскими. Допустимая точка $\tilde{x}$ будет решением задачи

$$xV'(\bar{t}) \to min,$$
$$\|xV(\bar{t})\| \leq 1,$$

тогда и только тогда, когда существуют натуральное r, причем $r \geq n$, такие точки t_i отрезка $[a, b]$ и числа c_i, что выполняются условия:

$$|\tilde{x}V(t_i)| = 1, i = 1, \ldots, r,$$

$$sign\mathrm{c}_i = -\tilde{x}V(t_i), i = 1, \ldots, r$$

и для любого $x \in R^{n+1}$

$$xV'(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{c}_i xV(t_i).$$

Замечание 1. Предположим, что $\phi_0'(t) = 0$ и система $\phi_1'(t), \ldots, \phi_n'(t)$ является также чебышевской. Тогда числа r в теореме 2 не больше $n + 1$.

Действительно, в противном случае нашлись бы хотя бы n экстремальных точек многочлена $\tilde{x}V(t)$ интервала (a, b) и получилось бы, что нетривиальный многочлен $\tilde{x}V'(t)$ имеет не менее n нулей, что невозможно.

Замечание 2. Если $r = n + 1$, то $\tilde{x}V(t_i) \cdot \tilde{x}V(t_{i+1}) < 0, i = 1, \ldots, n + 1$.

Действительно, если для какого-то i было бы противоположное неравенство, то такой интервал (t_i, t_{i+1}) содержал бы еще одну точку экстремума многочлена $\tilde{x}V(t)$, что, в силу замечания 1, невозможно.

Список литературы

1. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени// Собр. соч., Т.I. Изд-во АН СССР, 1952. С. 11-104.
2. Марков А.А. Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Изв. Петербургской АН, 1989, Т. 62. С. 1-24.
3. Стечкин С.Б. Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна// ДАН СССР, Т.60, №9. С. 1511-1514.
4. Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб, 1892. 117 с.
5. Бари Н.К. Обобщение неравенств С.Н. Бернштейна и А.А. Маркова //Изв. АНСССР, сер. матем., 1954, 18, №2. С. 159-176.
6. Аптекарев А.И., Дро А., Калягин В.А. Об асимптотике точных констант в неравенствах Маркова-Бернштейна в интегральных метриках с классическим весом// УМН, М. 2000, Т.55, вып. 1 (331). С. 173-174.
7. Загиров Н.Ш., Ахмадова М.А., Шамхалова Т.Н. Постоянная Маркова для весовых пространств // Вестник ДГУ, №6, 2012. С. 75-80.

8. Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.Ю. Оценки постоянной В.А. Маркова в весовом пространстве Якоби // Вестник ДГУ, сер. Ест.н., Т33, №3, 2018. С. 54-61.

9. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. Изд-во МГУ, 1989. 204 с.

10. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., «Наука», 1977. 514 с.

РАЗРАБОТКА ПРОТОТИПА МОБИЛЬНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРУЮЩЕГО КОМПЛЕКСА

Спирина Н.С., Спирин В.В., Попков Е.В., Котлобай В.Н.

DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2019.3.50.122

Ключевые слова: Мобильный лазерный сканер, лидар, ГНСС, мобильное картографирование, облако точек, инерциально-измерительный блок

Введение

Мобильные лазерные сканирующие комплексы – это новый виток эволюции в развитии сканирующих систем. Их выгодно отличает от статических сканирующих систем возможность перемещения по поверхности земли и вследствие чего сканирование протяженных объектов.

Согласно данным с сайта geo-matching.com (агрегатор новостей в сфере лазерного сканирования) количество поисковых запросов по теме мобильного лазерного сканирования растет, начиная с 2016 года. Также был отмечен рост поисковых запросов в системе Google по тематике мобильного картографирования, пик пришелся на 2018 год. [1] Это говорит о растущем спросе в мире на системы мобильного лазерного сканирования и услуги, которые последние могут предоставить. В России данная тематика развита слабо, и на данный момент имеются только 2 производителя подобных систем.

В данной статье рассматривается способ построения подобной системы из отдельных составляющих ее элементов, приводится информация о необходимом программном обеспечении и результатах испытаний собранной системы.

Аппаратная часть

Мобильные лазерные сканеры использоваться внутри помещений и на открытой местности. В связи с этим меняется аппаратная составляющая. В данной статье рассматривается сканер, который работает вне помещения.

В состав мобильного лазерного сканера входят следующие устройства:

Лазерный дальномер или лидар. Предоставляет набор расстояний до объектов, углы относительно оси вращения лидара, при которых эти расстояния были измерены, и время. По полученным данным можно рассчитать координаты точек в декартовой системе координат, центром которой является центр лидара.

Навигационная система. Предоставляет набор данных о местоположении устройства в пространстве и качестве полученной информации: широта, долгота, высота, среднеквадратичная ошибка широты, долготы и высоты, количество спутников на небосводе и т.п.

Инерциально-измерительный модуль. Предоставляет данные о линейных ускорениях и угловых скоростях мобильного лазерного сканера. После обработки этих данных при помощи фильтра Калмана или Маджвика получаются углы, которые задают ориентацию сканера в пространстве (крен, тангаж, рысканье). Это углы Эйлера.

Плата синхронизации. Обеспечивает синхронизацию устройств 1-3 по времени навигационной системы и сигналу PPS.

Бортовой компьютер. Предназначен для управления и сбора данных с устройств 1-3. На бортовом компьютере запускается программное обеспечение, которое позволяет включать и останавливать запись с устройств, задавать им настройки и контролировать текущие статусы.

Схематично устройство мобильного лазерного сканирования представлено на рис. 1.