РЕАКЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА ДВИЖУЩУЮСЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКЕ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

Украинец Виталий Николаевич
доктор техн. наук, профессор
Павлодарский государственный университет
г. Павлодар
Гирнис Светлана Римонтасовна
кандидат техн. наук, ассоциированный профессор
Павлодарский государственный университет
г. Павлодар
Булыга Леонид Леонидович
кандидат техн. наук, ассоциированный профессор
Павлодарский государственный университет
г. Павлодар

REACTION OF AN ELASTIC HALF-SPACE TO MOVING IN A THREE-LAYER SHELL PERIODIC LOAD

Ukrainets Vitaliy Nikolaevich
Doctor of Technical Sciences, professor
Pavlodar state university
Pavlodar
Girnis Svetlana Rimontasovna
Candidate of Technical Sciences, associate professor
Pavlodar state university
Pavlodar
Bulyga Leonid Leonidovich
Candidate of Technical Sciences, associate professor
Pavlodar state university
Pavlodar

Аннотация
Решена задача о действии периодической нагрузки на подкреплённую трехслойной круговой цилиндрической оболочкой полость, расположенную в упругом полупространстве. Решение получено для случая, когда скорость движения нагрузки меньше скорости волны Рэлея в полупространстве.
Abstract
The problem of the action of a periodic load on a cavity supported by a three-layer circular cylindrical shell located in an elastic half-space is solved. The solution is obtained for the case when the speed of the load is less than the speed of the Rayleigh wave in half space.

Ключевые слова: упругое полупространство, трехслойная оболочка, подвижная периодическая нагрузка, напряженно-деформированное состояние.
Key words: elastic half-space, three-layered shell, periodic moving load, tense-deformed condition.

Постановка задачи. Рассмотрим расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве (массиве) бесконечно длинную круговую цилиндрическую трехслойную оболочку, внутренним слоем которой является толстостенная оболочка (заполнитель), а внешние слои (обшивка) представляют собой тонкостенные оболочки с радиусами срединных поверхностей R_1, R_2 и толщинами h_{01}, h_{02} (рисунок 1).

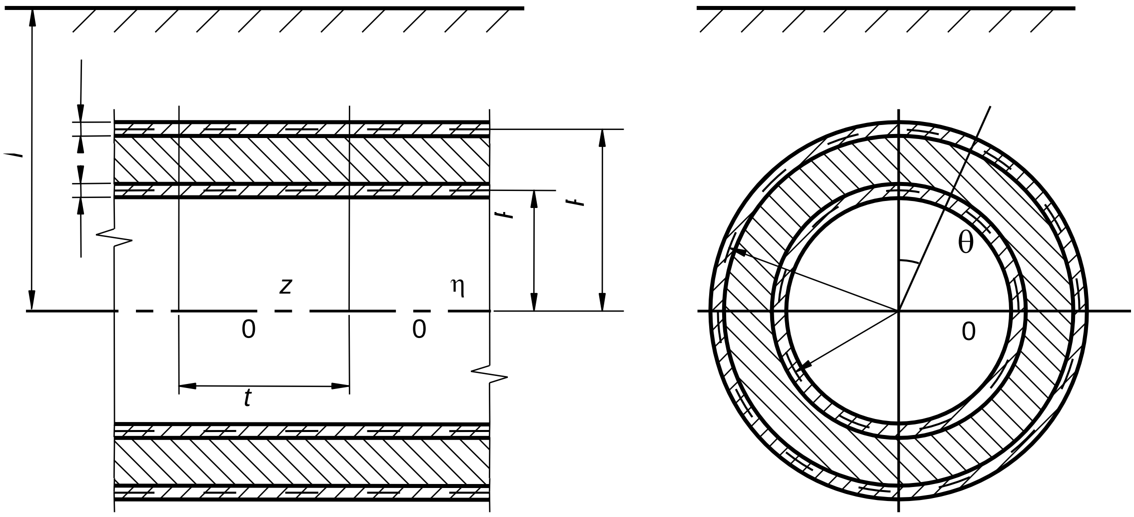

Рисунок 1 – Трёхслойная оболочка в упругом полупространстве

В силу малости толщины составляющих обшивку слоев допускается, что они контактируют с заполнителем и окружающим массивом вдоль срединных поверхностей. При этом контакт между оболочкой и массивом полагается либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении. Контакт между слоями оболочки полагается жёстким. Плоская граница полупространства свободна от нагрузок.

По внутренней поверхности оболочки в направлении её оси z с постоянной скоростью c движется нагрузка интенсивностью P. Скорость движения нагрузки принимается дозвуковой, т. е. меньше скоростей распространения волн сдвига в заполнителе и массиве. Физико-механические свойства массива и заполнителя характеризуются соответственно следующими постоянными: ν_1, μ_1, ρ_1; ν_2, μ_2, ρ_2,где ν_k – коэффициент Пуассона, μ_k – модуль сдвига, ρ_k – плотность ($k = 1, 2$). В дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2$ – к заполнителю.

Для описания движения массива и заполнителя используются динамические уравнения теории упругости в связанной с нагрузкой подвижной системой координат $(r, \theta, \eta = z - ct)$ [1]

$$\left(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}\right) grad \quad div\, \boldsymbol{u}_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 \boldsymbol{u}_k = \partial^2 \boldsymbol{u}_k / \partial \eta^2, \quad k = 1,\ 2, \tag{1}$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве и заполнителе, $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k/(1 - 2\nu_k)$; $\mathbf{u}_k$ – векторы смещений точек массива и заполнителя, ∇^2 – оператор Лапласа.

Колебания слоев обшивки описываются классическими уравнениями теории тонких оболочек в подвижной системе координат [1-3]

$$\left[1 - \frac{(1-\nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\right]\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_{0k}}{2R_k^2}\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_{0k}}{2R_k}\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_{0k}}{R_k}\frac{\partial u_{0rk}}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}\left(q_{\eta k} - q_{\eta R_k}\right),$$

$$\frac{1+\nu_{0k}}{2R_k}\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_{0k})}{2}\left(1 - \frac{\rho_{0k}c^2}{\mu_{0k}}\right)\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial u_{0rk}}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}\left(q_{\theta k} - q_{\theta R_k}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\nu_{0k}}{R_k}\frac{\partial u_{0\eta k}}{\partial \eta} + \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial u_{0\theta k}}{\partial \theta} + \frac{h_{0k}^2}{12}\nabla^2\nabla^2 u_{0rk} + \frac{(1-\nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\frac{\partial^2 u_{0rk}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0rk}}{R_k^2} =$$

$$= -\frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}\left(q_{rk} - q_{rR_k}\right).$$

Здесь для наружного слоя обшивки $k = 1$, для внутреннего – $k = 2$; ν_{0k}, μ_{0k}, ρ_{0k} – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материалов слоев обшивки; $u_{0\eta k}$, $u_{0\theta k}$, u_{0rk} – перемещения точек срединных поверхностей слоев обшивки; $q_{jR_2} = \sigma_{rj2}\big|_{r=R_2}$, $q_{j1} = \sigma_{rj2}\big|_{r=R_1}$,

$q_{jR_1} = \sigma_{rj1}\big|_{r=R_1}$ – составляющие реакции заполнителя и массива, $j = \eta, \theta, r$ (при скользящем контакте оболочки с массивом $q_{\eta R_1} = q_{\theta R_1} = 0$), σ_{rj1}, σ_{rj2} – компоненты тензоров напряжений в массиве и заполнителе, $q_{j2} = P_j(\theta,\eta)$, $P_j(\theta,\eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta,\eta)$, $j = \eta, \theta, r$.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то, при $x = h$

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0. \qquad (3)$$

При различных контактных условиях оболочки с массивом граничные условия имеют вид:

- для скользящего контакта оболочки с массивом

при $r = R_1$ $u_{r1} = u_{r2}$, $u_{j2} = u_{0j1}$, $\sigma_{r\eta 1} = 0$, $\sigma_{r\theta 1} = 0$,

$$\text{при } r = R_2 \; u_{j2} = u_{0j2}, \; j = r, \theta, \eta; \qquad (4)$$

- для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \; u_{j1} = u_{j2}, u_{j1} = u_{0j1}, \text{ при } r = R_2 \; u_{j2} = u_{0j2}, j = r, \; \theta, \; \eta, \qquad (5)$$

где u_{jk} (k = 1, 2) – компоненты векторов $\mathbf{u}_k$.

Векторы $\mathbf{u}_k$ можно выразить через потенциалы Ламе

$$\boldsymbol{u_k = grad\,\phi_{1k} + rot(\phi_{2k} e_\eta) + rot\,rot(\phi_{3k} e_\eta)}, \quad \boldsymbol{k = 1, \; 2}, \qquad (6)$$

которые, как следует из (1) и (6), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \phi_{jk} = M_{jk}^2 \, \partial^2 \phi_{jk} / \partial \eta^2 \,, \; j = 1, \; 2, \; 3, \quad k = 1, \; 2, \qquad (7)$$

где $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Через эти же потенциалы, используя (6) и закон Гука, можно выразить компоненты тензоров напряжений σ_{lmk} в массиве (k = 1) и заполнителе (k = 2) в цилиндрической $(l, m = r, \theta, \eta)$ системе координат, а также σ_{lm1} в декартовой $(l, m = x, y, \eta)$ системе координат.

Таким образом, для определения компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) массива и заполнителя необходимо решить уравнения (7), используя граничные условия (3) и, в зависимости от условия контакта оболочки с массивом, (4) или (5).

2. Аналитическое решение задачи. Рассмотрим случай действия на оболочку синусоидальной по η подвижной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta,\eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \qquad (8)$$

$$P_j(\theta,\eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta,$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (8), поэтому

$$\phi_{jk}(r,\theta,\eta) = \Phi_{jk}(r,\theta) e^{i\xi\eta}, \; j = 1, \; 2, \; 3, \; k = 1, \; 2, \qquad (9)$$

$$u_{0jk}(\theta,\eta) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0njk} e^{in\theta} \, e^{i\xi\eta}, \; j = r, \theta, \eta, \; k = 1, \; 2. \qquad (10)$$

Из (7) и (9) следует, что

$$\nabla_2^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \; j = 1,2,3, \quad k = 1, \; 2, \qquad (11)$$

где $m_{jk} = \left(1 - M_{jk}^2\right)^{1/2}$, $m_{1k} = m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$, ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа.

Используя (9) можно получить выражения для перемещений u_{lk} и напряжений σ_{lmk} $(l, m = r, \theta, \eta)$ в массиве (k = 1) и заполнителе (k = 2), а также u_{l1}, σ_{lm1} $(l, m = x, y, \eta)$ в массиве как функции от Φ_{jk}.

В дозвуковом случае $M_{sk} < 1$ ($m_{sk} > 0$, k = 1, 2), и решения уравнений (11) можно представить в виде [1-3]

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \; j = 1,2,3, \quad k = 1, \; 2, \qquad (12)$$

где:

- для массива

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1} r) e^{in\theta},\ \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi,\zeta)\, exp\ \left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right)\ d\zeta; \tag{13}$$

- для заполнителя

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2} r) e^{in\theta},\ \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2} r)\ e^{in\theta}. \tag{14}$$

Здесь $I_n(k_j r),\ K_n(k_j r)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|,\ k_{j2} = |m_{j2}\xi|;\ g_j(\xi,\zeta),\ a_{n1},\dots,a_{n9}$ – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению, j = 1, 2, 3.

Как показано в [3], представление потенциалов для полупространства в форме (12) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + g_j(\xi,\zeta) e^{(x-h)f_j}\right] e^{iy\zeta} d\zeta, \tag{15}$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2},\quad \Phi_{nj} = \left[(\zeta + f_j)/k_{j1}\right]^n,\ \ j = 1,2,3.$

Воспользуемся граничными условиями (3), с учетом (15). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая, в силу произвольности y, их нулю, получим систему трех уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi,\zeta)$ через неизвестные коэффициенты $a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3}$:

$$g_j(\xi,\zeta) = \frac{1}{\Delta^*} \sum_{l=1}^{3} \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl}\Phi_{nl}, \tag{16}$$

Вид определителя Δ^* и алгебраических дополнений Δ_{jl}^* совпадает с аналогичными определителями для неподкрепленной полости в упругом полупространстве и определён в [3]. В частности, здесь Δ^* – это определитель Рэлея, который в данном случае имеет вид

$$\Delta^* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$
$$\alpha = M_{p1}\xi,\ \beta = M_{s1}\xi,\ \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

и не обращается в ноль при любых ζ, если скорость движения нагрузки меньше скорости рэлеевской волны c_R в полупространстве. В противном случае в точках $\zeta = \pm\zeta^* = \pm|\xi|\sqrt{M_R^2 - 1},\ \ M_R = c/c_R$, он обращается в ноль, и интегралы в формуле (15) становятся расходящимися.

Ограничимся случаем $c < c_R$. Тогда все подынтегральные функции в (15) непрерывны и экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности. С учетом (16), потенциалы (15) имеют вид

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^{3} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl}\Phi_{nl}\right] e^{iy\zeta} d\zeta. \tag{17}$$

Следует отметить, что скорость рэлеевской волны c_R несколько ниже (на 5÷10%) скорости волн сдвига в массиве.

Используя известное при $x < h$ соотношение [3]

$$exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r)\, e^{in\theta} \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right)/k_j\right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим Φ_{j1} (12) в цилиндрической системе координат

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1} r) + I_n(k_{j1} r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi,\zeta)\ \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta\right)\ e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (16) $g_j(\xi,\zeta)$, для $c < c_R$ получим

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r)\right)\ e^{in\theta}, \tag{18}$$

$$где\ b_{nj} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml},\ A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} \Phi_{ml}\Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)}\, d\zeta.$$

Подставляя найденные для потенциалов соотношения в выражения для u_{lk} и σ_{lmk}, получим новые выражения, где неизвестными будут только коэффициенты $a_{n1},\ldots,a_{n9}$.

Подставляя (10) в (2), для n-го члена разложения получим

$$\varepsilon_{1k}^2 u_{0n\eta k}+\nu_{02k} n\xi_{0k} u_{0n\theta k}-2i\nu_{0k}\xi_{0k}u_{0nrk}=G_{0k}\left(q_{n\eta k}-q_{n\eta R_k}\right),$$

$$\nu_{02k} n\xi_{0k} u_{0n\eta k}+\varepsilon_{2k}^2 u_{0n\theta k}-2inu_{0nrk}=G_{0k}\left(q_{n\theta k}-q_{n\theta R_k}\right), \qquad (19)$$

$$2i\nu_{0k}\xi_{0k}u_{0n\eta k}+2inu_{0n\theta k}+\varepsilon_{3k}^2 u_{0nrk}=G_{0k}\left(q_{nrk}-q_{nrR_k}\right),$$

где k = 1, 2; $\varepsilon_{1k}^2=\alpha_{0k}^2-\varepsilon_{0k}^2,\ \varepsilon_{2k}^2=\beta_{0k}^2-\varepsilon_{0k}^2,\ \ \varepsilon_{3k}^2=\gamma_{0k}^2-\varepsilon_{0k}^2,\ \ \xi_{0k}=\xi R_k,$

$$\alpha_{0k}^2=2\xi_{0k}^2+\nu_{01k}n^2,\ \beta_{0k}^2=\nu_{01k}\xi_{0k}^2+2n^2,\ \gamma_{0k}^2=\chi_k^2\left(\xi_{0k}^2+n^2\right)^2+2,\ \varepsilon_{0k}^2=\nu_{01k}\xi_{0k}^2 M_{s0k}^2,$$

$$\nu_{01k}=1-\nu_{0k},\nu_{02k}=1+\nu_{0k},\ \ M_{s0k}=c/c_{s0k},\ c_{s0k}=\sqrt{\frac{\mu_{0k}}{\rho_{0k}}},\ \ \chi_k^2=\frac{h_{0k}^2}{6R_k^2},\ \ G_{0k}=-\frac{\nu_{01k}R_k^2}{\mu_{0k}h_{0k}};$$

$$q_{nj1}=\left(\sigma_{rj2}\right)_n\Big|_{r=R_1},q_{jR_1}=\left(\sigma_{rj1}\right)_n\Big|_{r=R_1},q_{nj2}=P_{nj}(\theta,\eta),q_{jR_2}=\left(\sigma_{rj2}\right)_n\Big|_{r=R_2},j=\eta,\theta,r.$$

Разрешая (19) относительно $u_{0n\eta k}, u_{0n\theta k}, u_{0nrk}$, находим

$$u_{0n\eta k}=\frac{G_{0k}}{\delta_{nk}}\sum_{j=1}^{3}\delta_{\eta jk}\left(q_{njk}-q_{njR_k}\right),$$

$$u_{0n\theta k}=\frac{G_{0k}}{\delta_{nk}}\sum_{j=1}^{3}\delta_{\theta jk}\left(q_{njk}-q_{njR_k}\right), \qquad (20)$$

$$u_{0nrk}=\frac{G_{0k}}{\delta_{nk}}\sum_{j=1}^{3}\delta_{rjk}\left(q_{njk}-q_{njR_k}\right).$$

Здесь $\delta_{nk}=\delta_{|n|k}=(\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k}\varepsilon_{3k})^2-(\varepsilon_{1k}\xi_1)^2-(\varepsilon_{2k}\xi_{2k})^2-(\varepsilon_{3k}\xi_{3k})^2+2\xi_1\xi_{2k}\xi_{3k},$

$$\delta_{\eta 1k}=(\varepsilon_{2k}\varepsilon_{3k})^2-\xi_1^2,\quad \delta_{\eta 2k}=\xi_1\xi_{2k}-\xi_{3k}\varepsilon_{3k}^2,\quad \delta_{\eta 3k}=i(\varepsilon_{2k}^2\xi_{2k}-\xi_1\xi_{3k}),$$

$$\delta_{\theta 1k}=\delta_{\eta 2k},\quad \delta_{\theta 2k}=(\varepsilon_{1k}\varepsilon_{3k})^2-\xi_{2k}^2,\quad \delta_{\theta 3k}=i(\varepsilon_{1k}^2\xi_1-\xi_{2k}\xi_{3k}),$$

$$\delta_{r1k}=-\delta_{\eta 3k},\quad \delta_{r2k}=-\delta_{\theta 3k},\quad \delta_{r3k}=(\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k})^2-\xi_{3k}^2,$$

$$\xi_1=2n,\quad \xi_{2k}=2\nu_{0k}\xi_{0k},\quad \xi_{3k}=\nu_{02k}\xi_{0k}n,$$

для q_{njk} и q_{njR_k} индекс j = 1 соответствует индексу η, j = 2 – θ, j = 3 – r.

Для определения коэффициентов $a_{n1},\ldots,a_{n9}$ воспользуемся, в зависимости от условия сопряжения оболочки со средой, граничными условиями (4) или (5). Подставляя в граничные условия соответствующие выражения и приравнивая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему (n = 0, ±1, ±2,…) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [3], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида. В случае произвольной периодической по η нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье, для каждой составляющей ряда получим вышерассмотренную задачу.

Список литературы.

1. Украинец В.Н., Гирнис С.Р. Математическое моделирование динамики подкрепленных двухслойными оболочками тоннелей при действии транспортных нагрузок. – Павлодар: Кереку, 2018. – 116 с.

2. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках //Прикладная механика. НАН Украины – Киев, 2009. – Т. 45. – № 9. – С. 75–85.

3. Украинец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. – Павлодар: НИЦ ПГУ, 2006. – 123 с.