ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Поленов Виктор Сидорович
доктор физ.-мат. наук, профессор
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А. Гагарина»
г, Воронеж

DYNAMIC DEFORMATION OF TWO- PHASE GRANUL AR MEDIA WITH CONSIDERATION OF PHASE TRANSITIONS

Polenov Viktor
doctor of physics-mat. science, Professor
VUNTS air force "Military and air Academy of a name Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin'
Voronezh

Аннотация

В данной статье изучается распространение волн в двухфазной среде, с учетом фазовых переходов, где первой фазой является жидкость или газ, а второй – зернистая твердая среда. Зерна твердой фазы представляют собой сферически- симметричные частицы постоянного радиуса. В таких средах механизм передачи усилия проявляется через контакты между зернами. В этом случае эффекты прочности твердой фазы проявляются в тензоре фиктивных напряжений. Предполагается, что микро-деформации и смещения твердой фазы малы. Жидкость первой фазы будем считать сжимаемой.

Abstract

This article studies the propagation of waves in a two-phase medium, taking into account phase transitions, where the first phase is a liquid or gas, and the second is a granular solid medium. The grains of the solid phase are spherical- symmetrical particles of constant radius. In such environments, the mechanism of force transfer manifests itself through contacts between grains. In this case, the effects of solid phase strength are shown in the fictitious stress tensor. It is assumed that micro-deformations and displacements of the solid phase are small. The liquid of the first phase will be considered compressible.

Ключевые слова: среда, волна, деформация, скорость упругость, жидкость, пористость.

Keywords: medium, wave, deformation, elastic velocity, liquid, porosity.

В работах [1,2,4,7,8] рассматривалось деформирование однородных и неоднородных пористых сред насыщенных жидкостью, где показано, что в таких средах существует два типа вон и определены скорости и интенсивности их распространения.

Основные соотношения, определяющие процесс динамического деформирования двухфазных зернистых сред с учетом фазовых переходов можно описать системой [3,5,6]:

- уравнения движения фаз среды (импульсов фаз) в случае фазовых переходов имеют вид

$$\rho_{11}\frac{\partial V_1^k}{\partial t}-\rho_{12}\frac{\partial V_2^k}{\partial t}=-\alpha_1\frac{\partial p_1}{\partial x^k}-n\cdot j_{21}(V_2^k-V_1^k)$$
$$\rho_{12}\frac{\partial V_1^k}{\partial t}-\rho_{22}\frac{\partial V\ \rightleftarrows_2^k}{\partial t}=\alpha_2\frac{\partial p_1}{\partial x^k}-\frac{\partial\sigma_f^{kl}}{\partial x^l}-n\cdot j_{21}(V_2^k-V_1^k) \qquad (1)$$

где V_i^k $(i=1,2)$ $-$ скорости перемещения фаз среды; $\frac{\partial}{\partial t}$ $-$частная производная по времени; $\frac{\partial}{\partial x^k}$ $-$частная производная по координате x^k; ρ_{11} и ρ_{22} $-$массы жидкости и твердой фазы в единице объема среды; ρ_{12} $-$коэффициент динамической связи жидкости и твердой фазы; j_{21} $-$интенсивность фазовых переходов массы из 2 $-$ой в 1 $-$ю составляющую $(j_{21}<0)$, если наоборот, то $j_{12}>0$; n $-$ число дисперсных частиц. α_i- доли объема среды; σ_f^{kl} $-$фиктивные напряжения двухфазной среды; p_1 $-$давление жидкости (газа) в первой фазе;

- обобщенный закон Гука для фиктивных напряжений двухфазной среды

$$\sigma_f^{kl}=\alpha_2[\lambda_f\varepsilon_2^{mm}\delta^{kl}+2\mu_f\varepsilon_2^{kl}+\nu_f p_1\delta^{kl}] \qquad (2)$$

где ε_2^{kl} −тензор деформаций твердой фазы; λ_f, μ_f, ν_f −фиктивные модули упругости среды. Они однозначно выражаются через модули упругости Ламе и модули упругости зернистого скелета (твердой фазы); δ^{kl} −символ Кронекера; α_2 −доля объема твердой фазы в среде; p_1 −давление жидкости в первой фазе.

- давление в первой фазе, выраженное через деформации твердой фазы

$$p_1 = \Lambda\varepsilon_2^{kk}, \Lambda = \frac{1}{1-\nu_f}\{\lambda_f - \lambda_2 + \frac{2}{3}(\mu_f - \mu_2)\} \quad (3)$$

Скорость тензора упругих деформаций твердой фазы выражается через скорость твердой фазы V_2^k по формуле

$$\frac{\partial\varepsilon_2^{kl}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2^k}{\partial x^l} + \frac{\partial V_2^l}{\partial x^k}\right) \quad (4)$$

Компоненты контравариантных тензоров будем обозначать верхними индексами.

По повторяющимся верхними индексами проводится суммирование от 1 до 3.

Для определения скоростей волн двухфазной среды, продифференцируем (1) - (3) по t

$$\begin{gathered}
\rho_{11}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{12}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} = -\alpha_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial t\,\partial x^k} - n\cdot j_{21}(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} - \frac{\partial V_1^k}{\partial t}) \\
\rho_{12}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{22}\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{V}_2^k}{\partial t^2} = \alpha_2\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^k\,\partial t} - \frac{\partial^2\sigma_f^{kl}}{\partial x^l\,\partial t} - n\cdot j_{21}(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} - \frac{\partial V_1^k}{\partial t}) \\
\frac{\partial\sigma_f^{kl}}{\partial t} = \alpha_2\{(\lambda_f + \nu_f\Lambda)\frac{\partial V_2^m}{\partial x^m}\delta^{kl} + \mu_f(\frac{\partial V_2^k}{\partial x^l} + \frac{\partial V_2^l}{\partial x^k})\} \\
\frac{\partial p_1}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial V_2^k}{\partial x^k}
\end{gathered} \quad (5)$$

Пусть число зерен n в среде постоянно и зерна представляют собой сферически – симметричные частицы радиуса $r = const$, которые выражаются через объемное содержание дисперсной фазы по формуле

$$n = \frac{3}{4\pi r^3}\alpha_2 \quad (6)$$

Дифференцируя третье и четвертое уравнения (5) по x^m и учитывая (6), получим систему двух дифференциальных уравнений относительно V_1^m и V_2^m

$$\begin{gathered}
\rho_{11}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{12}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} + \alpha_1\Lambda\frac{\partial^2 V_2^m}{\partial x^k\,\partial x^m} + b\alpha_2 j_{21}(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} - \frac{\partial V_1^k}{\partial t}) = 0 \\
\rho_{12}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{22}\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{V}_2^k}{\partial t^2} + \alpha_2\Lambda_1\frac{\partial^2 V_2^m}{\partial x^k\,\partial x^m} + \alpha_2\mu_f\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^m\,\partial x^m} + b\alpha_2 j_{21}(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} - \frac{\partial V_1^k}{\partial t}) = 0 \\
b = \frac{3}{4r^3\pi}, \Lambda_1 = \lambda_f + \mu_f - (1-\nu_f)\Lambda
\end{gathered} \quad (7)$$

Решение системы (7) будем искать в виде затухающих волн

$$\begin{gathered}
V_1^k = C_1^k\,exp[i\omega t - (\alpha + i\beta)x^m\nu^m] \\
V_2^k = C_2^k\,exp[i\omega t - (\alpha + i\beta)x^m\nu^m], \beta = \frac{\omega}{c}
\end{gathered} \quad (8)$$

Здесь ν^m −означает единичный вектор в направлении распространения волн со скоростью $c > 0$, частотой $\omega > 0$, коэффициентом затухания $\alpha > 0$, фазовой постоянной β и амплитудами C_1^k и C_2^k, $i = \sqrt{-1}$ −мнимая единица.

Подставим (8) в систему (7), получим

$$-\rho_{11}\omega^2 C_1{}^k + \rho_{12}\omega^2 C_2^k + \alpha_1\Lambda(\alpha + i\beta)^2 C_2^m \nu^k \nu^m + b\alpha_2 j_{21}(i\omega C_2^k - i\omega C_1^k) = 0$$
$$-\rho_{12}\omega^2 C_1^k + \rho_{22}\omega^2 C_2^k + \alpha_2\Lambda_1(\alpha + i\beta)^2 C_2^m \nu^k \nu^m + \alpha_2\mu_f(\alpha + i\beta)^2 C_2^k \nu^m \nu^m + $$
$$+ b\alpha_2 j_{21}(i\omega C_2^k - i\omega C_1^k) = 0 \qquad (9)$$

Характеристики поперечной волны определяются из уравнения (9), если положить в нем $C_1^k\nu^k = 0$, $C_2^k\nu^k = 0$ и $\nu^m\nu^m = 1$; получим

$$(\rho_{11}\omega^2 + i\omega b\alpha_2 j_{21})C_1^k - (\rho_{12}\omega^2 + i\omega b\alpha_2 j_{21})C_2^k = 0$$
$$(\rho_{12}\omega^2 + i\omega b\alpha_2 j_{21})C_1^k - [\rho_{22}\omega^2 + i\omega b\alpha_2 j_{21} + \alpha_2\mu_f(\alpha + i\beta)^2]C_2^k = 0 \qquad (10)$$

Условием существования ненулевых решений однородной системы (10) служит равенство нулю ее определителя, что приводит к уравнению

$$k\omega^3 + \rho_{11}\alpha_2\mu_f(\alpha + i\beta)^2\omega + i[A\omega^2 + \alpha_2\mu_f(\alpha + i\beta)^2]b\alpha_2 j_{21} = 0$$
$$k = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2, A = \rho_{11} + \rho_{22} - 2\rho_{12} \qquad (11)$$

После преобразования выражения (11) и разделения действительной и мнимой частей, получим систему уравнений относительно α и β

$$\alpha^2 - \beta^2 = B_1$$
$$2\alpha\beta = B_2$$
$$B_1 = -\frac{\omega^2[k\rho_{11}\omega^2 + A(b\alpha_2 j_{21})^2]}{\alpha_2\mu_f[(\rho_{11}\omega)^2 + (b\ \ \alpha_2 j_{21})^2]}, B_2 = \frac{b j_{21}\omega^3\alpha_2(k - \rho_{11}A)}{\alpha_2\mu_f[(\rho_{11}\omega)^2 + (b\alpha_2 j_{21})^2]} \qquad (12)$$

Из системы (12) находим коэффициент затухания α_t и фазовую постоянную β_t для поперечных волн, распространяющихся в двухфазной зернистой среде с учетом фазовых переходов, когда зерна твердой фазы представляют собой сферически – симметричные частицы постоянного радиуса

$$\alpha_t = \frac{(k - \rho_{11}A)bj_{21}\omega^2\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{2\mu_f\chi_2(\chi_1 + \sqrt{\chi_2\chi_3})}}$$
$$\beta_t = \omega \cdot \sqrt{\frac{\chi_1 + \sqrt{\chi_2\chi_3}}{2\alpha_2\mu_f\chi_2}} \qquad (13)$$
$$\chi_1 = [k\rho_{11}\omega^2 + A \cdot (b \cdot \alpha_2 \cdot j_{21})^2], \chi_2 = (\rho_{11}\omega)^2 + (b \cdot \alpha_2 \cdot j_{21})^2$$
$$\chi_3 = (k\omega)^2 + (A\alpha_2 b j_{21})^2$$

Скорость распространения поперечной волны определим из равенства $\beta_t = \frac{\omega}{c_t}$, где c_t −скорость распространения поперечной волны в двухфазной зернистой среде

$$c_t = \sqrt{\frac{2\alpha_2\mu_f\chi_2}{\chi_1 + \sqrt{\chi_2\chi_3}}} \qquad (14)$$

Если в двухфазной среде отсутствуют фазовые переходы ($j_{21} = 0$), то из (14) следует, что в рассматриваемой среде распространяются поперечные волны только в твердой фазе и их скорости определяются формулой

$$c_t = \sqrt{\frac{\rho_{11}\alpha_2\mu_f}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}} \qquad (15)$$

Характеристики продольных звуковых волн определим из (9), если положить $C_1^k\nu^k = D_1 \neq 0$, $C_2^k\nu^k = D_2 \neq 0$. Для этого умножим оба уравнения (9) на ν^k и просуммируем по повторяющемуся индексу m. В результате получим

$$\begin{gathered}(\rho_{11}\omega^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega)D_1 - [\rho_{12}\omega^2 + \alpha_1\Lambda(\alpha + i\beta)^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega]D_2 = 0 \\ (\rho_{12}\omega^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega)D_1 - [\rho_{22}\omega^2 + \alpha_2\Lambda_1(\alpha + i\beta)^2 + \alpha_2\mu_f(\alpha + i\beta)^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega]D_2 = 0\end{gathered} \qquad (16)$$

Составим определитель системы и приравняем его к нулю

$$\begin{gathered}\begin{vmatrix}\rho_{11}\omega^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega & -[\rho_{12}\omega^2 + \alpha_1\Lambda(\alpha + i\beta)^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega] \\ \rho_{12}\omega^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega & -[\rho_{22}\omega^2 + \alpha_2\Lambda_2(\alpha + i\beta)^2 + ib\alpha_2 j_{21}\omega\end{vmatrix} = 0 \\ \Lambda_2 = \lambda_f + 2\mu_f - (1 - \nu_f)\Lambda\end{gathered} \qquad (17)$$

После раскрытия определителя (17) и разделения на действительную и мнимую части, получим

$$\begin{gathered}\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \\ 2\alpha\beta = \frac{\gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \\ \xi_1 = \rho_{11}\alpha_2\Lambda_2\omega - \rho_{12}\alpha_1\Lambda\omega \\ \xi_2 = \alpha_2^2\Lambda_2 b j_{21} - \alpha_1\Lambda b\alpha_2 j_{21} \\ \gamma_1 = k\omega^3, \gamma_2 = Ab\alpha_2 j_{21}\omega^2\end{gathered} \qquad (18)$$

Из системы (18) находим коэффициент затухания α_l и фазовую постоянную β_l для продольных волн, распространяющихся в двухфазной зернистой среде с учетом фазовых переходов, когда зерна твердой фазы представляют собой сферически – симметричные частицы постоянного радиуса.

$$\begin{gathered}\alpha_l = \frac{(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2)}{\sqrt{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)[(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2) + \sqrt{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}]}} \\ \beta_l = \sqrt{\frac{(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2) + \sqrt{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}\end{gathered} \qquad (19)$$

Учитывая, что $\beta_l = \frac{\omega}{c_l}$, где $c_l -$ скорость распространения продольной волны, получим

$$c_l = \sqrt{\frac{2\omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2) + \sqrt{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}} \tag{20}$$

Если в среде отсутствуют фазовые переходы, то скорость распространения продольной волны определяется формулой

$$c_l = \sqrt{\frac{\rho_{11}\alpha_2\Lambda_2 - \rho_{12}\alpha_1\Lambda}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}} \tag{21}$$

Формулу (20) можно записать в другом виде, если введем следующее обозначение

$$\eta_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1}{\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2}\right)^2} \tag{22}$$

Тогда формула (20) примет вид

$$c_l = \sqrt{\frac{2\omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2)(1 + \eta_2)}} \tag{23}$$

Таким образом, зная вид затухающих волн, по формулам (13), (14), (19) и (20) или (23), можно определить скорости распространения и коэффициенты затухания волн в двухфазной зернистой среде.

Список литературы

1. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-frequency range//J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. № 2. P. 168 -178.

2. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах //ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1115 - 1123.

3. Киселев Г.К., Гусев А.П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпо-нентных и двухфазных средах// Новосибирск. ВО «Наука». Сибирская изда-тельская фирма. - 1992. 261 с.

4. Масликова Т.И. Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах// Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 104-108.

5. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред//М.: Наука, 1978. 336 с.

6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред//М.: Наука. ч. 1. 1987. 464с., ч. 2. 1987. 380 с.

7. Поленов В.С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде// ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 501-507.

8. Polenov V.S., Chigarev A.V. Mathematical modeling of shock waves in inhomogeneous viscoelastic two component media// Journal of Applied Mathematics and Physics, 2018. 6. (5). P. 997 - 1005.