ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МНОГОМЕТОДНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ И ПАРАМЕТРОВ

Александр Иванович Тятюшкин
доктор техн. наук, профессор
Институт динамики систем и теории управления СО РАН)
г. Иркутск

MULTI-METHOD OPTIMIZATION OF CONTROL FUNCTIONS AND PARAMETERS

Alexander Ivanovich Tyatyushkin
doctor tech. sciences, professor
Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS)
Irkutsk
DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2020.1.54.189

Аннотация

Рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями, содержащая управляющие параметры как в правых частях управляемой системы, так и в начальных условиях. Для решения этой сложной задачи предлагается сначала редукция к задаче математического программирования, а затем для поиска оптимальных значений параметров и управляющих функций - применение многометодного алгоритма, состоящего из методов линеаризации, метода приведенного градиента и метода спроектированного лагранжиана.

Abstract

An optimal control problem with phase constraints is considered, which contains control parameters both in the right-hand sides of the controlled system and in the initial conditions. To solve this complex problem, it is proposed first to reduce to a mathematical programming problem, and then to find the optimal parameter values and control functions, we use a multi-method algorithm consisting of linearization methods, the reduced gradient method, and the designed Lagrangian method.

Ключевые слова: численные методы; задача оптимального управления с параметрами; метод приведенного градиента; модифицированная функция Лагранжа; многометодная оптимизация.

Key words: numerical methods; optimal control problem with parameters; reduced gradient method; modified Lagrange function; multi-method optimization.

1. ВВЕДЕНИЕ

При построении математической модели сложного динамического процесса, а также при создании систем с желаемыми свойствами и поведением нередко используется параметрический синтез управления в виде функции известной структуры от фазовых координат, но с неизвестными значениями параметров. Тогда проблема синтеза управления сводится к задаче оптимизации процесса с параметрами [1,2].

В инженерной практике из-за большой трудоемкости расчетов на полной модели или трудностей, связанных с ее технической реализацией, часто возникает проблема понижения порядка системы, описывающей динамический процесс, с сохранением поведения некоторых переменных состояния. Эта проблема так же, как и ряд других проблем из области моделирования и идентификации динамических процессов, сводится к задаче оптимизации параметров. В данной статье рассматривается задача оптимального управления, когда в правые части системы входят не только параметры, но и управляющие функции, а начальные условия системы также зависят от параметров, выбором которых обеспечивается оптимальная стартовая точка для траектории. Заметим, что такая задача нередко возникает в динамике полета летательных аппаратов. Например, наличие в бортовом компьютере непилотируемого космического аппарата Буран программы выбора оптимальной начальной точки наряду с алгоритмами расчета оптимальной траектории посадки обеспечило ему успешное и точное приземление. Задачи оптимального управления с параметрами в начальных условиях возникают также при расчете наиболее эффективных маневров, обеспечивающих защиту задней полусферы самолета от ракет класса «воздух – воздух» [3,4]. При проектировании самолета пятого поколения СУ-57 – мирового лидера по маневренности - была решена целая серия задач такого типа В монографиях [5-6], приведены результаты большого числа численных экспериментов, выполненных по многометодным алгоритмам для других практических задач из области энергетики, проектирования робототехнических систем и космических аппаратов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями, когда правая часть системы зависит не только от управлений, но и от параметров.

Пусть задан управляемый процесс с управляющими параметрами как в правых частях так и в начальных условиях

$$\dot{x} = f(x, u, w, t), x(t) \in E^n, u(t) \in E^r, t \in T = [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = \Theta(v), w \in R^p, v \in R^n \tag{2.1}$$

с терминальными условиями

$$I_i(u) = h_i\big(x(t_1)\big) = 0, i = \overline{1, m}, \tag{2.2}$$

и фазовыми ограничениями

$$J_i(u, v) = g_i(x(t), t) = 0, t \in T, i = \overline{1, s}. \tag{2.3}$$

Управление и параметры стеснены следующими ограничениями:

$$c_i(u, t) = 0, t \in T, i = \overline{1, l}, \tag{2.4}$$

$$u^{н}(t) \le u(t) \le u^{в}(t), t \in T, \tag{2.5}$$

$$v^{н} \le v \le v^{в}, w^{н} \le w \le w^{в}, \tag{2.6}$$

где $c_i(u, t)$, $i = \overline{1, l}$, — непрерывно дифференцируемые по u и кусочно-непрерывные по t функции; $\Theta(v)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Относительно функций, определяющих условия (2.1)–(2.3), справедливы предположения, оговоренные ранее, к которым добавляется также их непрерывная дифференцируемость по параметрам.

Требуется среди управлений и параметров, удовлетворяющих ограничениям (2.4)–(2.6), найти такие, которые обеспечивают выполнение условий (2.3) для управляемого процесса (2.1) и приводят его в точку фазового пространства, где с заданной точностью будут выполнены условия (2.2), а функционал

$$I_0(u) = \phi\big(x(t_1)\big) \tag{2.7}$$

достигнет наименьшего значения.

Для построения аппроксимирующей задачи на заданном интервале T вводится сетка дискретизации с узлами t_0, t^1, …, t^N такими, что

$$t_0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = t_1. \tag{2.8}$$

Эта сетка может быть и неравномерной.

Управляющие функции $u^i(t)$, $i = \overline{1, r}$, ищутся только в узлах (2.8), а для получения промежуточных значений $u^i(t)$, $i = \overline{1, r}$, используется либо кусочно-постоянная аппроксимация

$$u^i(t) = u^i(t^j) = u^i_j, t \in [t^j, t^{j+1}],$$

либо кусочно-линейная

$$u^i(t) = \frac{[(t^{j+1} - t)u_j + (t - t^j)u_{j+1}]}{(t^{j+1} - t^j)}, t \in [t^j, t^{j+1}]. \tag{2.9}$$

Тогда конечномерная задача, аппроксимирующая задачу (2.1)–(2.7), будет иметь следующий вид:

$$\dot{x} = f(x, u, w, t), t \in T = [t_0, t_1], x(t_0) = \Theta(v),$$

$$h_i\big(x(t^N)\big) = 0, i = \overline{1, m},$$

$$g_i(x(t^j), t^j) = 0, i = \overline{1, s}, j = \overline{0, N},$$

$$c_i(u_j, t^j) = 0,\ i = \overline{1,l},\ j = \overline{0,N}, \tag{2.10}$$

$$v^{н} \le v \le v^{в}, \qquad w^{н} \le w \le w^{в},$$

$$\phi(x(t^N)) \to min, \quad u_j^{н} \le u_j \le u_j^{в}, j = \overline{0,N},$$

где

$$u_j^{н} = u^{н}(t^j), \qquad u_j^{в} = u^{в}(t^j), \qquad j = \overline{0,N}.$$

Заметим, что в аппроксимирующей задаче (2.10) управляемый процесс (2.1) остается непрерывным, а в процессе счета он с требуемой точностью (достаточно высокой) моделируется численным методом интегрирования.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АППРОСИМИРУЮЩЕЙ ЗАДАЧИ

3.1. Линеаризация ограничений. Расчет Якобиана.

Градиенты функционалов $I_j(u)$, $j = \overline{0,m}$, с помощью функций $H^j(\psi_j, x, u, t) = = \psi_j'(t) f(x,u,t)$ и сопряженной системы

$$\dot{\psi}_j = -f_x(x,u,t)'\psi_j(t),\ \psi_j(t_1) = -\phi_x^j(x(t_1))$$

традиционно определяются по формулам:

$$\nabla I_j(u) = -H_u^j(\psi_j, x, u, t),\ j = \overline{0,m}.$$

Для каждого $t \in T$ можно аналогично вычислить градиенты $J_j(u,t)$, $j = \overline{1,s}$:

$$\nabla I_j(u,t) = -\bar{H}_u^j(\Phi_j, x, u, t, \tau),\ t_0 \le \tau \le t \le t_1,$$

где $\bar{H}^j(\Phi_j, x, u, t, \tau) = \Phi_j'(t,\tau) f(x,u,\tau)$, $\Phi_j(t,\tau)$, $j = \overline{1,s}$ – решения сопряженной системы

$$\frac{\partial \Phi_j(t,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\Phi_j(t,\tau),\ \tau \in [t_0, t]$$

с краевыми условиями

$$\Phi_j(t,t) = -\frac{\partial g^j(x(t))}{\partial x},\ j = \overline{1,s}.$$

Линеаризуем ограничения в аппроксимирующей задаче. Матрица-якобиан линеаризованных ограничений составляется из градиентов ∇I_i, $i = \overline{1,m}$, и $\nabla J_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, $t \in T$. Так как правые части и начальные условия системы (2.1) зависят еще и от параметров, то необходимо иметь также градиенты функционалов I_i, $i = \overline{1,m}$, и $J_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, $t \in T$, по этим параметрам:

$$\begin{gathered} \nabla_v I_i(u^k, w^k, v^k) = -\psi_i(t_0)'\Theta_v(v^k), i = \overline{1,m}, \\ \nabla_w I_i(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t_1} \psi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t)dt, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\psi_i(t)$ — решения сопряженной системы,

$$\nabla_w J_i(u^k, w^k, v^k, t^j) = -\int_{t_0}^{t^j} \Phi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t)dt, \tag{2.12}$$

$$\nabla_v J_i(u^k, w^k, v^k, t^j) = -\Phi_i(t_0)'\Theta(v^k), i = \overline{1,s}, j = \overline{1,N}. \tag{2.13}$$

Пусть теперь на k-й итерации внешнего метода на сетке (2.8) найдено $u^k(t^j)$ и ему соответствующее $x^k(t^j)$, $j = \overline{1,N}$.

Для расчета градиентов по управлению $\nabla_u I_i$, $i = \overline{1,m}$, система (2.10) m раз интегрируется от t_1 до t_0 с разными начальными условиями. Попутно вычисляются градиенты (2.11) с использованием квадратурных формул для расчета интегралов.

Далее ищутся градиенты функционалов $J_i(t^j)$, $j = \overline{1,N}$, $i = \overline{1,s}$. Для этого нужно s раз решить задачу Коши для каждого узла сетки (2.8), т.е. проинтегрировать систему $s \cdot N$ раз в среднем на половине отрезка T.

На полученных решениях вычисляются компоненты градиентов $\nabla_u I_i$, $i = \overline{1,m}$; $\nabla_u J_i(t^j)$, $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,N}$; с учетом аппроксимации управления их значения равны

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}} \psi^k(t)' f_u\big(x^k, u_j^k, w^k, t\big) dt$$

— в случае кусочно-постоянной аппроксимации и

$$\frac{1}{t^{j+1} - t^j}\left[\int_{t^{j-1}}^{t^j} \psi^k(t)' f_u(x^k, \bar{u}^k(t), w^k, t)(t - t^{j-1}) dt + \right.$$
$$\left. + \int_{t^j}^{t^{j+1}} \psi^k(t)' f_u(x^k, \bar{u}^k(t), w^k, t)(t^{j+1} - t) dt\right] \qquad (2.14)$$

— в случае кусочно-линейной аппроксимации (2.9). При этом $\bar{u}^k(t)$ вычисляется по формуле (2.9) при $u_j = u_j^k$, $u_{j+1} = u_{j+1}^k$.

Из полученных значений градиентов по управлению∇I_i, $i = \overline{1,m}$, и $\nabla J_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, $t \in T$, и вычисленных по формулам (2.11)–(2.13) градиентов по параметрам составляется матрица коэффициентов линеаризованных ограничений.

Вводя векторные обозначения для равенств (2.2)–(2.4), построим модифицированную функцию Лагранжа для задачи (2.1)–(2.7):

$$L = \phi\big(x(t_1)\big) - \lambda^{k'}\big[h\big(x(t_1)\big) - \bar{h}^L\big] + \tfrac{\rho}{2}\big[h\big(x(t_1)\big) - \bar{h}^L\big]'\big[h\big(x(t_1)\big) - \bar{h}^L\big] -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \mu^{k'}(t)[g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt + \frac{\rho}{2}\int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), t) - \bar{g}^L]'[g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \gamma^k(t)[c(u, t) - \bar{c}^L] dt + \tfrac{\rho}{2}\int_{t_0}^{t_1} [c(u, t) - \bar{c}^L]'[c(u, t) - \bar{c}^L] dt, \qquad (2.15)$$

где $\bar{h}^L = h\big(x^k(t_1)\big) + h_x\big(x^k(t_1)\big)\delta x(t_1)$, $\bar{g}^L = g(x^k(t), t) + g_x(x^k(t), t)\delta x(t)$,

$$\bar{c}^L = c(u^k(t), t) + c_u(u^k(t), t)\delta u(t),\ \delta u = u - u^k, \quad \delta x = x - x^k.$$

Далее линеаризуем ограничения (2.2), (2.3) на k-м приближении:

$$I^k + \textstyle\sum_{j=0}^N \nabla_u I^k(t^j)'\big(u_j - u_j^k\big) + \nabla_w I^{k'}(w - w^k) + \nabla_v I^{k'}(v - v^k) = 0, \qquad (2.16)$$

$$J_j^k + \sum_{i=0}^{j}\big[\nabla_u J^k(t^j)'\big(u_i - u_i^k\big) + \nabla_w J^k(t^j)'(w - w^k) + \nabla_v J^k(t^j)'(v - v^k)\big] = 0,$$
$$j = \overline{0,N}. \qquad (2.17)$$

Здесь $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$, $J = (J_1, J_2, \dots, J_s)$. Следовательно, имеем m ограничений (2.16) и $(N+1)s$ ограничений (2.17), которые представляют собой явную форму (через u, w, v) линеаризованных $\big(h^L, g_j^L\big)$ ограничений (2.2), (2.3), причем вместо равенств (2.3), заданных для каждого момента $t \in T$, имеем N равенств, определенных в узлах сетки (2.8).

Линеаризуем также условия (2.4):

$$c(u^k, t^j) + \nabla_u c(u^k, t^j)'\big(u_j - u_j^k\big) = 0,\ j = \overline{0,N}, \qquad (2.18)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)$. Прямые ограничения на управление и параметры оставим без изменений:

$$u_j^{\text{н}} \le u_j \le u_j^{\text{в}}, j = \overline{1,N}, \qquad (2.19)$$

$$v_j^{\text{н}} \le v_j \le v_j^{\text{в}}, j = \overline{1,n}, w_i^{\text{н}} \le w_i \le w_i^{\text{в}}, i = \overline{1,p}. \qquad (2.20)$$

Для минимизации функционала (2.15) при линейных ограничениях (2.16)–(2.20) применяется метод приведенного градиента [7]. Заметим, что функционал (2.15) предполагает использование исходной системы (2.1) для расчета траектории $\{x(t^1), x(t^2), \ldots, x(t^N)\}$ по заданным параметрам v, w и управлению $u(t^0)$, $u(t^1)$, …, $u(t^N)$, т.е. полная модель вспомогательной задачи описывается соотношениями (2.1), (2.15)–(2.20).

3.2. Алгоритм метода спроектированного лагранжиана.

Рассмотрим теперь полный алгоритм решения исходной задачи (2.1)–(2.6).

1. С заданным управлением u_j^k, $j = \overline{0,N}$, интегрируется система (2.1), и в узлах сетки (2.8) запоминаются точки фазовой траектории $x_j^k, j = \overline{0,N}$. Здесь k — номер итерации (первый раз $k = 0$).

На полученном решении линеаризуются ограничения задачи (2.10) и строится вспомогательная задача (2.15)–(2.20).

2. Методом приведенного градиента решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа (2.15) при линейных ограничениях (2.16)–(2.20).

В результате будут найдены новые приближения для управления u_j^{k+1}, $j = \overline{0,N}$, параметров w^{k+1} и v^{k+1}, а также для двойственных переменных λ^{k+1} и μ_j^{k+1}, $j = \overline{0,N}$.

3. Проверяется критерий окончания итерационного процесса как по прямым, так и по двойственным переменным:

$$\frac{|I_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})|}{(1+\alpha^{k+1})} \le \varepsilon, i = \overline{1,m},$$

$$\frac{|J_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})|}{(1+\alpha^{k+1})} \le \varepsilon, i = \overline{1,s},$$

где

$$\alpha^{k+1} = max\{\|u_j^{k+1}\|, j = \overline{0,N}; |w_i|, i = \overline{1,p}; |v_l|, l = \overline{1,n}\};$$

$$\frac{|\lambda_j^k - \lambda_j^{k+1}|}{(1+\Theta^{k+1})} \le \varepsilon, j = \overline{1,m};$$

$$\frac{|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}^{k+1}|}{(1+\Theta^{k+1})} \le \varepsilon, i = \overline{1,s}, j = \overline{0,N};$$

$$\Theta^{k+1} = max\{|\lambda_j^{k+1}|, j = \overline{1,m}; |\mu_{ij}^{k+1}|, i = \overline{1,s}, j = \overline{0,N}\}.$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий выполняется новая $k+1$-я итерация с п. 1. Если же эти неравенства выполняются для заданного $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс прекращается, а найденные u_j^{k+1}, $j = \overline{0,N}$, w^{k+1} и v^{k+1} выдаются в качестве приближенного решения задачи оптимального управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в данной статье численные методы оптимизации параметров и управляющих функций конструктивно учитывают фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного [8] и нелинейного программирования [7] для решения вспомогательных задач большой размерности. Современные информационные технологии и многопроцессорная вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений [9]. Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию [6] расчета оптимального управления и оптимальных параметров, успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники [3-6].

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Н., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.

3. Тятюшкин А.И., Федунов Б.Е. Численное исследование свойств оптимального управления в одной задаче преследования. Изв. РАН, ТиСУ. 2005. № 3. С. 104-113.

4. Тятюшкин А.И., Федунов Б.Е. Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром. Изв. РАН, ТиСУ. 2006. № 1. С. 111-125.

5. Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.

6. Тятюшкин А.И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 2006.

7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985.

8. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы

оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. – Минск: Университетское, 1984.

9. Тятюшкин А.И. Параллельные вычисления в задачах оптимального управления //Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 181-190.

ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИОНО-МАГНИТОСФЕРЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ И СВЧ-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Шестакова Ольга Владимировна
Кандидат технических наук, доцент
МАИ (национальный исследовательский университет)
Москва

DISPERSION EQUATIONS OF POTENTIAL OSCILLATIONS OF THE ION-MAGNETOSPHERE, PLACED IN A PERMANENT MAGNETIC AND MICROWAVE ELECTRIC FIELD

Shestakova Olga Vladimirovna
Candidate of technical Sciences, associate Professor
MAI (national research University),
Moscow
DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2020.1.54.188

Аннотация

В данной статье приводится теоретическое обоснование дисперсионного уравнения потенциальных колебаний ионо-магнитосферы. Это уравнение необходимо для решения актуальной научно-технической задачи по разработке вероятностно-статистического метода моделирования явлений переноса в многокомпонентной, помещенной СВЧ-электрической поле.

Abstract

This article provides a theoretical justification for the dispersion equation of the potential vibrations of the ion-magnetosphere. This equation is necessary for solving the urgent scientific and technical problem of developing a probabilistic-statistical method for modeling transport phenomena in a multicomponent, placed microwave electric field.

Ключевые слова: ионо-магнитосфера, параметры ионо-магнитосферы, радиолокационный импульс, авроральные неоднородности.

Keywords: ion-magnetosphere, state ion-magnetosphere parameters, radar pulse, auroral inhomogeneities.

Расширение масштабов задач, решаемых обеспечивающими космическими системами, а также перспективные планы широкомасштабного использования космоса для размещения ударных систем, решающих задачи поражения наземных, воздушных и космических объектов требуют совершенствования методов и алгоритмов, используемых для обработки траекторных измерений с целью повышения их достоверности и точности определения траекторных параметров движения цели ведет к решению различных научно-технических задач.

Особый интерес представляет собой решение актуальной научно-технической задачи по разработке вероятностно-статистического метода моделирования явлений переноса в многокомпонентной, помещенной СВЧ-электрической поле, построению и анализу на основе полученных результатов математической модели влияния ионо-магнитосферы на характеристики систем электронной техники, имеющей существенное значение для повышения эффективности функционирования РЛС, широкомасштабного использования космоса для решения различных задач связи, а также для обработки траекторных измерений с целью повышения их достоверности и точности определения траекторных параметров движения различных летательных аппаратов (цели).

Одним из этапов решения поставленной задачи является теоретическое обоснование дисперсионного уравнения потенциальных колебаний ионо-магнитосферы, полученных из бесконечной системы уравнений типа Вольтера для сверх-высокочастотного электрического поля с частотой превосходящей собственные частоты среды.

Для обоснования дисперсионного уравнения потенциальных колебаний многокомпонентной ионо-магнитосферы в качестве исходного пункта используем уравнение Пуассона.

$$div\delta\vec{E} = 4\pi \sum_{\alpha} \delta n_{\alpha}, \quad (1)$$

где в правой части фигурирует возмущение плотности заряженных частиц, а в левой - возмущение потенциального электрического поля.