

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ**Малинина Надежда Аркадьевна***доктор техн.наук, профессор**Орловский государственный аграрный университет имени Н.В.Парахина
г.Орел***Малинин Георгий Владиславович***кандидат техн.наук, доцент**Публичное акционерное общество «Туполев»
г.Москва***ANALYTICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE FLAT SHELL****Malinina Nadezhda Arkadijevna***Doctor of tech.science, professor**Oryol state agrarian University named after N. V. Parakhin***Malinin George Vladislavovich***candidate tech.sciences, associate professor**Public joint stock company "Tupolev"**Moscow***Аннотация**

Проведен анализ напряженно-деформированного состояния пологой оболочки прямоугольного плана с различными значениями кривизны. Выполнен расчет покрытия строительного сооружения аналитическими методами: методом Ритца, методом двойных тригонометрических рядов и численными методами: методом конечных разностей и методом конечных элементов. Сравнительный анализ полученных результатов расчета показал хорошее соответствие аналитических и численных методов.

Abstract

The analysis of the stress-strain state of a flat shell of a rectangular plan with different values of curvature is carried out. The calculation of the coating of a construction structure is performed using analytical methods: the Ritz method and the method of double trigonometric series, and numerical methods: the finite difference method and the finite element method in the ANSYS software package. A comparative analysis of the obtained calculation results is performed.

Ключевые слова: аналитические и численные методы, метод Ритца, метод двойных тригонометрических рядов, метод конечных разностей, метод конечных элементов, пологая оболочка, краевая задача.

Keywords: analytical and numerical methods, Ritz method, double trigonometric series method, finite difference method, finite element method, flat shell, boundary value problem.

В настоящее время для расчетов оболочек различной формы в строительных конструкциях часто используют промышленные пакеты прикладных программ, реализующих метод конечных элементов (МКЭ) такие как SCAD Office, ЛИРА, SAP, ANSYS, MSC.NASTRAN и др. Несмотря на это в инженерной практике часто возникает потребность в правильном выборе расчетной схемы и аналитическом анализе решаемой инженерной задачи [2, с.38]. В данной статье приведен пример сравнительного анализа, который может быть применен для некоторых оболочек постоянной толщины: пологих оболочек прямоугольного плана, цилиндрических панелей, сферических куполов, расчеты которых можно выполнять аналитическими методами, используя для этой цели математические пакеты: Mathcad, Maple, Mathematica и др. Такие расчеты помогают проанализировать поведение нескольких расчетных схем при изменении различных условий: геометрии, граничных условий, нагрузки; выяснить характер получаемого решения и избежать грубых ошибок при получении конечно-элементного решения [4, с.177].

В данной статье на основе метода Ритца в рамках линейной теории приводится анализ пологих оболочек прямоугольного плана при различных значениях кривизны срединной поверхности. При конкретных размерах пологой оболочки 20x20 метров в плане и толщиной 0,313 метров, применяемой в строительной практике, выполнен расчет как аналитическими методами: методом Ритца и методом двойных тригонометрических рядов, так и численными методами: методом конечных разностей и методом конечных элементов. Для применения метода Ритца требуется записать функционал полной энергии деформации, однако порядок производных искомым функций перемещений в нем на два порядка ниже, чем в уравнениях равновесия и в разрешающих дифференциальных уравнениях, что упрощает задачу по сравнению, например, с методом Бубнова-Галеркина. Особенно просто применение метода Ритца, когда оболочечные конструкции имеют прямоугольную форму; в этом случае во всей области деформированное состояние описывается едиными соотношениями, а краевые условия таковы, что легко можно

подобрать аппроксимирующие функции [3, с.7]. Эти ограничения справедливы для большинства оболочек покрытия строительных конструкций. Материал оболочки считаем упругим и изотропным, также считаем справедливой гипотезу об отсутствии поперечных сдвигов (гипотеза прямой нормали). Поперечная нагрузка постоянна и всегда ортогональна к срединной поверхности оболочки. Срединную поверхность оболочки толщиной h примем за координатную поверхность.

Оси x и y ортогональной системы координат направлены по линиям главных кривизн оболочки, ось z – ортогонально к срединной поверхности в сторону вогнутости. Перемещения точек срединной поверхности в направлении осей x , y , z обозначим, соответственно, через U , V , W . Главные кривизны оболочки $k_x = 1/R_1$, $k_y = 1/R_2$, где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны в направлении осей x , y соответственно (Рисунок 1).

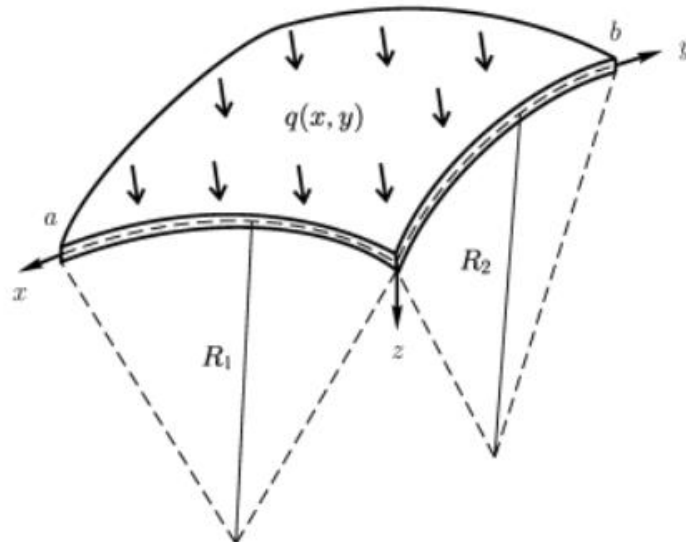


Рисунок 1. Геометрия поверхности

Функционал полной энергии деформации полой оболочки, находящейся под действием поперечной нагрузки имеет вид [3, с.10]:

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \{ \varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \frac{h^2}{12} \times$$
(1)

$$\times \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4\mu_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - 2(1-\mu^2) \frac{q}{Eh} W \} dx dy,$$

где ε_x , ε_y , γ_{xy} – относительные линейные и угловая деформация, соответственно, q – поперечная нагрузка, h – толщина оболочки, E , μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, $\mu_1 = (1-\mu)/2$.

Для того чтобы иметь возможность рассчитывать целую серию пологих оболочек прямоугольного плана, различающихся лишь геометрическими размерами, необходимо перейти к безразмерным параметрам:

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \lambda = \frac{a}{b}, \bar{U} = \frac{aU}{h^2}, \bar{V} = \frac{bV}{h^2},$$

$$\bar{W} = \frac{W}{h}, k_\xi = \frac{a^2 k_x}{h}, k_\eta = \frac{b^2 k_y}{h}, \bar{P} = \frac{a^4 q}{Eh^4}. \quad (2)$$

После чего функционал полной энергии деформации примет вид:

$$\Pi = \frac{Eh^5 ab}{2(1-\mu^2)a^4} \bar{\Pi}, \quad (3)$$

$$\text{где } \bar{\Pi} = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{\varepsilon}_x^2 + 2\mu\lambda^2 \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \lambda^4 \bar{\varepsilon}_y^2 + \mu_1 \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \left(\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \right)^2 + 2\mu\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \eta^2} + \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \eta^2} \right)^2 + 4\mu_1\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right) - \quad (4)$$

$$- 2(1 - \mu^2) \bar{P} \cdot \bar{W} \} \partial \xi \partial \eta.$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - k_\xi \bar{W}$, $\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} - k_\eta \bar{W}$, $\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi}$.
Выразив деформации через перемещения, получим:

$$\bar{\Pi} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right)^2 + \mu_1 \lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right)^2 + 2\mu\lambda^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + 2\mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} - 2k_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \bar{W} + \right.$$

$$+ \lambda^4 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} \right)^2 + \mu_1 \lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} \right)^2 - 2\lambda^2 k_2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} \bar{W} + k_3 \bar{W}^2 +$$

$$\left. + \frac{1}{12} \left(\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \right)^2 + 2\mu\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \eta^2} + \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \eta^2} \right)^2 + 4\mu_1 \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right) - \right.$$

$$\left. - 2(1 - \mu^2) \bar{P} \cdot \bar{W} \} \partial \xi \partial \eta. \quad (5)$$

Здесь $k_1 = k_\xi + \mu\lambda^2 k_\eta$, $k_2 = \mu k_\xi + \lambda^2 k_\eta$, $k_3 = k_\xi^2 + 2\mu\lambda^2 k_\eta k_\xi + \lambda^4 k_\eta^2$
В соответствии с методом Ритца безразмерные перемещения представляются в виде:

$$\bar{U} = \sum_{l=1}^N U1(I)X1(I)Y1(I), \bar{V} = \sum_{l=1}^N V1(I)X2(I)Y2(I), \bar{W} = \sum_{l=1}^N W1(I)X3(I)Y3(I) \quad (6)$$

Здесь $U1(I)$, $V1(I)$, $W1(I)$ – неизвестные числовые параметры; $X1(I), X2(I)$, $X3(I)$ – известные аппроксимирующие функции переменной ξ , удовлетворяющие при $\xi = 0$, $\xi = 1$ заданным краевым условиям; $Y1(I), Y2(I)$, $Y3(I)$ – известные аппроксимирующие функции переменной η , удовлетворяющие при $\eta = 0$, $\eta = 1$ заданным краевым условиям. Например, при шарнирно-неподвижном закреплении аппроксимирующие функции примут вид:

$$\bar{U} = \sum_{k=1} \sum_{l=1} U_{kl} \sin 2k\pi\xi \sin(2l-1)\pi\eta; \bar{V} = \sum_{k=1} \sum_{l=1} V_{kl} \sin(2k-1)\pi\xi \sin 2l\pi\eta,$$

$$\bar{W} = \sum_{k=1} \sum_{l=1} W_{kl} \sin(2k-1)\pi\xi \sin(2l-1)\pi\eta. \quad (7)$$

Выразив функционал полной энергии представленные в виде соответствующих рядов, деформации через безразмерные перемещения, получим:

$$\bar{\Pi} = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N [C1(I, J)U1(I)U1(J) + C2(I, J)U1(I)V1(J) + C3(I, J)U1(I)W1(J) +$$

$$+ C4(I, J)V1(I)V1(J) + C5(I, J)V1(I)W1(J) + C6(I, J)W1(I)W1(J)] -$$

$$- \sum_{l=1}^N C2(I) \bar{P} W1(I). \quad (8)$$

$$C1(I, J) = SX(1)SY(1) + \mu_1 \lambda^2 SX(2)SY(2), C2(I, J) = 2\mu\lambda^2 SX(3)SY(3) + 2\mu_1 \lambda^2 SX(4)SY(4),$$

$$C3(I, J) = -2k_1 SX(5)SY(5), C4(I, J) = \lambda^4 SX(6)SY(6) + \mu_1 \lambda^2 SX(7)SY(7),$$

$$C5(I, J) = -2k_2 \lambda^2 SX(8)SY(8), C6(I, J) = k^3 SX(9)SY(9) + \frac{1}{12} [SX(10)SY(9) +$$

$$+ 2\mu\lambda^2 SX(11)SY(10) + \lambda^4 SX(9)SY(11) + 4\mu_1 \lambda^2 SX(12)SY(12)],$$

$$C7(I) = 2(1 - \mu^2) SX(13)SY(13), \text{ где}$$

$$SX(I) = \int_0^1 FX(I) d\xi, SY(I) = \int_0^1 FY(I) d\eta,$$

$$FX(1) = X1'(I)X1'(J), FY(1) = Y1(I)Y1(J),$$

$$\begin{aligned}
FX(2) &= X1(I)X1(J), FY(2) = Y1'(I)Y1'(J), \\
FX(3) &= X1'(I)X2(J), FY(3) = Y1(I)Y2'(J), \\
FX(4) &= X1(I)X2'(J), FY(4) = Y1'(I)Y2(J), \\
FX(5) &= X1'(I)X3(J), FY(5) = Y1(I)Y3(J), \\
FX(6) &= X2(I)X2(J), FY(6) = Y2'(I)Y2'(J), \\
FX(7) &= X2'(I)X2'(J), FY(7) = Y2(I)Y2(J), \\
FX(8) &= X2(I)X3(J), FY(8) = Y2'(I)Y3(J), \\
FX(9) &= X3(I)X3(J), FY(9) = Y3(I)Y3(J), \\
FX(10) &= X3'(I)'(J), FY(10) = Y3(I)Y3'(J), \\
FX(11) &= X3'(I)'(J), FY(11) = Y3'(I)'(J), \\
FX(12) &= X3'(I)X3'(J), FY(12) = Y3'(I)Y3'(J), \\
FX(13) &= X3(J), FY(13) = Y3(J).
\end{aligned}$$

Далее, в соответствии с методом Ритца, находятся производные от $\bar{\Pi}$ по $U1, V1, W1$ и приравниваются нулю; в результате для нахождения неизвестных $U1(I), V1(I), W1(I)$ получается система линейных алгебраических уравнений. Эта система решается методом Гаусса

при $\bar{P} = 1$, затем найденные значения $U1(I), V1(I), W1(I)$ умножаются на \bar{P} .

В данной работе рассматривается первое приближение метода Ритца, т.е. одночленная аппроксимация перемещений. Это возможно, так как рассматриваются малые перемещения (линейная задача). Примем:

$$\bar{U} = U1 \cdot X1 \cdot Y1, \bar{V} = V1 \cdot X2 \cdot Y2, \bar{W} = W1 \cdot X3 \cdot Y3. \quad (9)$$

Теперь выражение для полной энергии деформации примет вид:

$$\bar{\Pi} = U1^2 C_1 + U1 V1 C_2 + U1 W1 C_3 + V1^2 C_4 + V1 W1 C_5 + W1^2 C_6 - \bar{P} C_7 W1. \quad (10)$$

Система линейных уравнений метода Ритца будет состоять из трех уравнений:

$$\begin{cases}
2 \cdot C_1 \cdot U1 + C_2 \cdot V1 + C_3 \cdot W1 = 0 \\
C_2 \cdot U1 + 2 \cdot C_4 \cdot V1 + C_5 \cdot W1 = 0 \\
C_3 \cdot U1 + C_5 \cdot V1 + 2 \cdot C_6 \cdot W1 = C_7 \cdot \bar{P}
\end{cases} \quad (11)$$

Решение системы (11) имеет вид:

$$\begin{aligned}
W1 &= -\frac{\bar{P} \cdot 2 \cdot C_1 \cdot C_7 \cdot (4C_1 \cdot C_4 - C_2^2)}{(2C_1 \cdot C_5 - C_2 \cdot C_3)^2 - (4C_1 \cdot C_4 - C_2^2)(4C_1 \cdot C_6 - C_3^2)}, \\
V1 &= -\frac{2 \cdot C_1 \cdot C_5 - C_2 \cdot C_3}{4C_1 \cdot C_4 - C_2^2} \cdot W1; U1 = -\frac{2 \cdot C_4 \cdot V1 + C_5 \cdot W1}{C_2}
\end{aligned} \quad (12)$$

Примем, что оболочка по контуру закреплена шарнирно-неподвижно, т.е. должны выполняться следующие условия:

$$\text{при } \xi = 0, \xi = 1 \quad \bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0;$$

$$\text{при } \eta = 0, \eta = 1 \quad \bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0,$$

тогда $X1 = \sin 2 \pi \xi, X2 = \sin \pi \xi, X3 = \sin \pi \xi,$

$$Y1 = \sin \pi \eta, Y2 = \sin 2 \pi \eta, Y3 = \sin \pi \eta. \tag{13}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} SX(1) &= 19,739, SX(2) = 0,5, SX(3) = -1,333, \\ SX(4) &= 1,333, SX(6) = 0,5, SX(7) = 4,935, SX(13) = 0,637, \\ SX(5) &= SX(3), SX(8) = SX(6), SX(9) = SX(6), SX(12) = SX(7), \\ SX(10) &= \pi^4 SX(6) = 48,705, SX(11) = -\pi^2 SX(6) = -4,935, \\ SY(1) &= SX(6), SY(2) = SX(7), SY(3) = SX(3), \\ SY(4) &= SX(4), SY(5) = SY(1), SY(6) = SX(1), \\ SY(7) &= SX(2), SY(8) = SX(3), SY(9) = SY(1), \\ SY(10) &= -\pi^2 SY(1) = -4,935, SY(11) = \pi^4 SY(1) = 48,705, \\ SY(12) &= SY(2), SY(13) = SX(13). \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= SX(1) \cdot SY(1) + \mu_1 \cdot \lambda^2 \cdot SX(2) \cdot SY(2) = 10,733, \\ C_2 &= 2\mu \cdot \lambda^2 SX(3) \cdot SY(3) + 2\mu_1 \cdot \lambda^2 \cdot SX(4) \cdot SY(4) = 2,311, \\ C_3(k_\xi, k_\eta) &= -2k_1 \cdot SX(5) \cdot SY(5) = 1,333(k_\xi + 0,3 \cdot k_\eta), \\ C_4 &= \lambda^4 \cdot SX(6) \cdot SY(6) + \mu_1 \cdot \lambda^2 \cdot SX(7) \cdot SY(7) = 10,733 \\ C_5(k_\xi, k_\eta) &= -2k_2 \cdot \lambda^2 \cdot SX(8) \cdot SY(8) = 1,333(0,3 \cdot k_\xi + k_\eta), \\ C_6(k_\xi, k_\eta) &= k^3 SX(9)SY(9) + \frac{1}{12} [SX(10)SY(9) + 2\mu\lambda^2 SX(11)SY(10) + \\ &+ \lambda^4 SX(9)SY(11) + 4\mu_1 \lambda^2 SX(12)SY(12)] = 0,25 \cdot (k_\xi^2 + 0,6k_\xi k_\eta + k_\eta^2) + 8,118, \\ C_7 &= 2 \cdot (1 - \mu^2) \cdot SX(13) \cdot SY(13) = 0,738. \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь для различных значений k_ξ, k_η , остальные значения C_i не изменятся используя выражение (12), найдем значение $(C_1 = C_4 = 10,733, C_2 = 2,311)$. Результаты прогиба оболочки. Для этого сначала необходимо расчета представим в виде таблицы 1. вычислить значения коэффициентов C_3, C_5, C_6 ,

Таблица 1

Прогиб в центре в зависимости от кривизны

Кривизна $k = k_\xi = k_\eta$	стрела подъема, f	Коэффициенты $C_3 - C_6$		Прогиб в центре, $W_0, \frac{qa^4}{Eh^3}$
		$C_3 = C_5$	C_6	
0 (плита)	–	0	8,118	0,0454
16	$2 \cdot h$	27,733	174,5	0,0026
32	$4 \cdot h$	55,465	673,718	0,00069
64	$8 \cdot h$	110,93	2670,518	0,00017
128	$16 \cdot h$	221,86	10657,718	0,000043

Определим максимальный прогиб и $z = -h/2$ (на внешней стороне оболочки) при наибольшие значения напряжений и моментов при следующих числовых данных:

$$a = 20 \text{ м}, h = 0,313 \text{ м}, E = 2,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \mu = 0,17, q = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}.$$

Пусть $k_\xi = k_\eta = 16$, тогда по формуле (12) получим:

$$W1 = 0,0026 \cdot \bar{P} = 5,679 \cdot 10^{-3}, \quad \left(\bar{P} = \frac{qa^4}{Eh^4} = \frac{3,8 \cdot 10^{-3} \cdot 20^4}{2,9 \cdot 10^4 \cdot 0,313^4} = 2,184 \right).$$

Максимальный прогиб: $W = W1 \cdot h = 5,679 \cdot 10^{-3} \cdot 0,313 = 0,0018\text{м}$.
Напряжения и моменты будут определяться по формулам:

$$\sigma_x(\xi, \eta) = \frac{Eh^2}{(1-\mu^2)a^2} \left(\bar{\varepsilon}_x(\xi, \eta) + \mu\lambda^2 \bar{\varepsilon}_y(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \mu\lambda^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) \right),$$

$$M_x(\xi, \eta) = -\frac{Eh^4}{(1-\mu^2)a^2} \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \mu\lambda^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right). \quad (16)$$

В центре оболочки при $\xi = \eta = 1/2$, напряжения и моменты будут равны:

$$\sigma_{x0} = -0,303 \cdot \bar{P} = -0,662\text{МПа}, \quad M_{x0} = -0,0018 \cdot \bar{P} = 3,91 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{м}.$$

Для проверки правильности решения аппроксимирующие функции примем в виде проведем расчет этой же оболочки методом суммы рядов с удержанием девяти членов ряда. двойных тригонометрических рядов [1, с.211]. Приведем только окончательные формулы.

$$w = \sum_m \sum_n w_{m,n} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \quad \Phi = \sum_m \sum_n \varphi_{m,n} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$q = \sum_m \sum_n q_{m,n} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (17)$$

$$w_{m,n} = \left[\frac{n^4 \pi^4 h^4}{12(1-\mu^2)b^4} A_{m,n} + \frac{64f^2 h^2}{A_{m,n} a^4} \left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2 f_2}{n^2 f} \right)^2 \right]^{-1} \frac{q_{m,n} h}{E}, \quad A_{m,n} = \left(\frac{m^2 b^2}{n^2 a^2} + 1 \right)^2,$$

$$\varphi_{m,n} = \frac{8Eb^2 f h}{\pi^2 A_{m,n} a^2 n^2} \left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2 f_2}{n^2 f} \right) w_{m,n}; \quad (f_1 = f_2 = f/2).$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy. \quad (18)$$

Продольная сила, изгибающий момент и напряжения:

$$N_x = -\sum_m \sum_n \varphi_{m,n} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \sigma_x = \frac{N_x}{h} \pm \frac{12M_x}{h^3} z,$$

$$M_x = D \sum_m \sum_n w_{m,n} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \mu \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (19)$$

Теперь рассчитаем поставленную задачу двумя численными методами: методом конечных разностей (МКР) и методом конечных элементов. Для упрощения расчета методом конечных разностей используем сетку 4x4. Напряженно-деформированное состояние пологих оболочек описывается системой линейных дифференциальных уравнений [5, с.104]:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \nabla_k^2 \varphi - q = 0; \quad \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \nabla_k^2 w = 0, \quad (20)$$

где $\nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор, φ – функция напряжений. Записывая приведенные уравнения в конечно-разностном виде, с учетом симметрии и граничных условий, получим систему линейных уравнений, из которой определяются прогибы и функция напряжений в узлах сетки. Затем по

прогибам легко находятся все силовые факторы и напряжения. Окончательно, проведем расчет методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Для решения поставленной задачи использовался элемент *Shell 181* при конечно-элементном разбиении 10x10 (Рисунок 2). В таблице 2 приведены результаты расчета в центре полой оболочки по четырем методам.

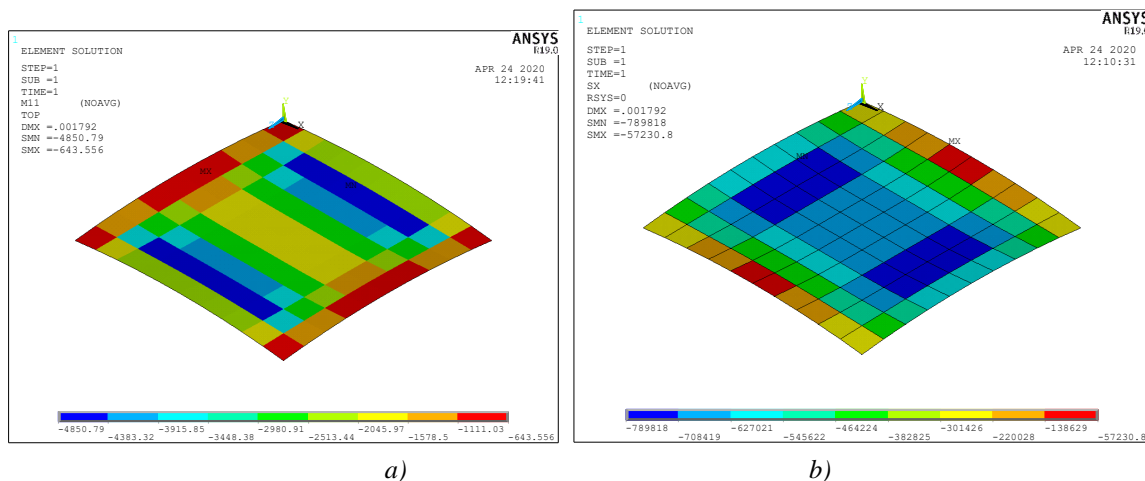


Рисунок 2. Силовые факторы: а) изгибающий момент, M_x , Н-м/м, б) напряжения σ_x , Па

Таблица 2

Результаты расчета оболочки аналитическими и численными методами

Методы	Прогиб, м	Напряжения, МПа	Момент, Н-м/м
Метод Ритца	0,0018	-0,662	$3,91 \cdot 10^3$
Метод двойных тригонометрических рядов	0,0032	-0,783	$3,155 \cdot 10^3$
МКР	0,0030	-0,734	$4,256 \cdot 10^3$
МКЭ	0,0018	-0,653	$2,017 \cdot 10^3$

Проведенный анализ пологой оболочки показал хорошее соответствие по результатам прогибов и напряжений различных методов (Таблица 2). Отличие значений изгибающих моментов в этих методах от метода конечных элементов можно объяснить выводом результатов по элементам без усреднения в программном комплексе ANSYS.

Литература:

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – Москва: Изд-во Высш. шк., 1990 г. , 400 с.
2. Вольнин А.Л. Сравнительный расчет прочности и устойчивости подкрепленных

оболочек в программных комплексах «ОБОЛОЧКА» и ANSYS // Вестник гражд.инженеров №2, 2010 – С.38-43.

3. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения Ч,П. – Изд-во Физматлит, 2011г., 276 с.

4. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений. Возможность их анализа. – Киев: Изд-во Изв.вузов «Сталь»,2002, 600 с

5. Справочник по теории упругости и пластичности (для инженеров строителей) под ред. д.т.н. Варвака П.М. и к.т.н. Рябова А.Ф.– Киев: Изд-во «Будівельник», 1971г, 413 с.