

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 551.51

ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ С ВЫСОТОЙ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОТКА ВОЗДУХА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ САТМОСФЕРЫ ДЛЯ РЕЖИМА, БЛИЗКОГО К «ЧИСТОЙ КОНВЕКЦИИ»

*Канцырев Борис Леонидович**доктор физико-математических наук,
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,
г. Москва*

ESTIMATION OF THE CHANGE FROM HEIGHT OF THE VERTICAL AIR FLOW IN THE SURFACE LAYER OF THE ATMOSPHERE FOR A REGIME CLOSE TO THE 'PURE CONVECTION' REGIME

*Kantsyrev Boris Leonidovich**doctor of Sciences,
Institute of Oceanology P.P. Shirshov RAS,
Moscow*DOI: [10.31618/nas.2413-5291.2020.2.59.292](https://doi.org/10.31618/nas.2413-5291.2020.2.59.292)

Аннотация

Цель работы- конкретизация «асимптотической формы» уравнения неразрывности для моделирования вертикального потока массы. Представлена конкретизация записи асимптотического квази- одномерного приближения для уравнения баланса массы в области приземного атмосферного слоя Земли. Даны численные оценки влияния адвекции, определяющие область применимости подхода в рамках конвективной модели при анализе приземного слоя. В линейном приближении оценена устойчивость решений по отношению к малым возмущениям вертикальных потоков тепла и массы.

Abstract

The purpose of this work is to analyze and concretize the asymptotic form of writing the continuity equation [3] for modeling thermo-physical processes in the surface layer of the atmosphere. In this case, the solution of the system of spatially one-dimensional equations of conservation laws for vertical dependences of air temperature and mass fraction of water vapor can be obtained in the future by using the calculated empirical dependences for the coefficient of turbulent exchange, based on the Monin-Obukhov "universal functions" approach.

Ключевые слова: приземный слой, модель Экмана, теорема Праудмена.

Keywords: surface layer, Ekman model, Proudman's theorem.

Введение. Как известно из литературы [1,2], расчёт параметров атмосферного воздуха в пограничном слое и в свободной атмосфере обычно проводится с использованием замыкающих соотношений на основе известной гипотезы Буссинеска, а решение в приземном слое (так называемом «слое постоянных потоков») - в виде расчётно- эмпирических зависимостей, полученных на основе теории подобия. При этом вертикальные зависимости для температуры и массовой доли атмосферных примесей (водяные пары, углекислый газ и т.п.) в приземном слое описываются так называемыми универсальными функциями, зависящими от безразмерной переменной $\zeta=z/L_*$, где L_* - масштаб длины Молина-Обухова.

Поведение решений при сильно устойчивой или сильно неустойчивой стратификации, на высотах, много больших L_* представлено в основных монографиях [например, в 2], но для того, чтобы восстановить их поведение для промежуточных режимов требуются эмпирические данные. Существенно, что для режима, соответствующего слабой адвекции, получаются результаты («закон 4/3» для коэффициента

турбулентного обмена), качественно отличающиеся от режимов с не большими числами Ричардсона.

Кроме того, вместо указанных расчётно-теоретических универсальных функций ζ , часто используются «подгоночные» зависимости от характеристик состояния атмосферы. Например, в Европейском центре среднесрочных прогнозов (ЕЦСПП) [3], последние 20 лет использовался подход, с помощью которого искусственно завышалась степень турбулентного перемешивания в пограничном слое атмосферы в условиях его устойчивой стратификации. Указанные подходы позволяют рассчитывать параметры атмосферы в приземном слое без интегрирования системы уравнений сохранения.

Целью настоящей работы является анализ и конкретизация асимптотической формы записи [5] уравнения неразрывности для моделирования теплофизических процессов в приземном слое атмосферы. При этом решение системы пространственно- одномерных уравнений законов сохранения для вертикальных зависимостей температуры воздуха и массовой доли водяных паров в дальнейшем можно получить, используя

для замыкания расчётно- эмпирические зависимости для коэффициента турбулентного обмена, основанные на подходе «универсальных функций» Мони́на- Обухова.

Постановка задачи. Настоящая работа предполагает последующий анализ процессов в приземном слое атмосферы на основе решений системы пространственно-одномерных уравнений теплопроводности, диффузии примесей (например- водяных паров) и уравнения неразрывности. При этом для замыкания системы уравнений могут быть использованы соотношения для коэффициента вертикального турбулентного переноса, полученные исходя из представлений теории, развитой в [4] на основе подхода Мони́на- Обухова.

Следует отметить, что в теории приземного слоя обычно рассматривается уравнение неразрывности для несжимаемой среды, из которого следует условие постоянства вертикального потока массы в приземном слое в отсутствие адвекции. Однако, поскольку в

действительности процессы в атмосфере практически никогда не бывают строго стационарными и «чисто конвективными», необходимо конкретизировать условия, которые должны быть выполнены для конвективной модели приземного слоя. Для этого полезно конкретизировать асимптотическое приближение, предложенное в [5], для уравнения неразрывности в условиях малости сил инерции по отношению к ускорению силы тяжести и соответствующее режиму, близкому к свободной естественной конвекции над горизонтальной поверхностью.

Приведённый ниже анализ позволяет уточнить условия, при которых вертикальный поток массы можно считать независимым от высоты. В рамках радиационно-конвективной модели [5] уравнение неразрывности в приземном слое можно рассмотреть, как следствие исходной системы уравнений гидродинамики при малых силах инерции относительно силы тяжести и представить в виде ;

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{g \dot{M}}{\gamma p} - \frac{\left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right)}{\gamma p} + \frac{(\gamma - 1) Q^*}{\gamma p} + g \frac{(\dot{M} + \rho u)}{\gamma} O(\epsilon), \quad \epsilon \leq 10^{-2}. \quad (1)$$

$$M = \int_z^{h(t)} \rho(t, x, y, z') dz'$$

где u, v, w - компоненты скорости ,

\dot{M} - масса воздуха над уровнем 'z' $h(t)$ - высота атмосферы в рамках модели. Влияние масс воздуха на высотах z , больших $h(t)$, учитывается в модели как граничное условие $p(h) = \text{const}$. Вертикальная

скорость воздуха на высоте $h(t)$ равна ; $w(t) = \frac{dh}{dt}$. Q^* - полный объёмный приток тепла за счёт турбулентной теплопроводности, поглощения радиации теплоты фазовых переходов.

Основные результаты. Для конкретизации вида (1) можно использовать выводы известной теоремы Праудмена (J. Proudman) , согласно которой вращательное стационарное движение

невязкой несжимаемой среды представляет собой наложение независимых движений: осевого и плоского поперечного, не зависящих от осевой координаты Z . Указанное расщепление движений можно интерпретировать, как обоснование (при определённых значениях параметров модели) конвективной модели атмосферы, которая движется неравномерно, обладает сжимаемостью и вязкостью. Для общности выводов учтём также и малые силы инерции « a ». Как и при доказательстве теоремы Праудмена, подействуем оператором \mathbf{rot} на правую и левую части уравнения движения, записанного в форме модели Тейлора- Экмана :

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \Omega \cos(\varphi), \quad \Omega_z = \Omega \sin(\varphi), \quad \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 a_x + \mathbf{e}_2 a_y + \mathbf{e}_3 a_z,$$

$$\mathbf{a} + 2[\Omega \times \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} + v^x \mathbf{e}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v^y \mathbf{e}_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \Omega_z^2 (\mathbf{e}_1 x + \mathbf{e}_2 y) \quad (2)$$

Здесь φ - широта, Ω - угловая скорость вращения Земли, \mathbf{a} - ускорение, \mathbf{v} - скорость, $\rho = \rho(T, p, \chi)$, T -температура, p -давление, χ - массовая доля водяных паров, ось z направлена вверх. v^x -

вертикальный коэффициент турбулентного переноса. В соответствии с [6] приравняв результат действия \mathbf{rot} по компонентам в правой и левой части, получим для горизонтальной составляющей дивергенции скорости:

$$\operatorname{div}_{\mathbf{H}}(\vec{v}) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} u + \frac{\partial \lambda}{\partial y} v \right) + f, \quad (3)$$

$$d\lambda = \frac{d\Gamma}{T} + \left(\frac{\mu_{\text{air}}}{\mu_{\text{vap}}} - 1 \right) dk, \quad f \equiv \operatorname{ctg}(\varphi) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} w \right) + \frac{1}{2\Omega \sin(\varphi)} \left[- \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) + a_y \frac{\partial \lambda}{\partial x} - a_x \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\Omega \sin(\varphi)}{2} \left(x \frac{\partial \lambda}{\partial y} - y \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \frac{v^*(z)}{2\Omega \sin(\varphi)} \left[\frac{\partial^2 \operatorname{rot}(\vec{v})_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right]$$

В (3) выделенное прямоугольной рамкой слагаемое соответствует влиянию вихревого движения на вертикальный поток массы. Если для вертикального потока импульса, обусловленного сдвиговым движением трения в приземном слое со скоростью трения $v^* \sim 1$ м/с - влиянием сил Кориолиса в приземном слое можно пренебречь [2],

то для вертикальной скорости $w \sim 1-10$ мм/с, сила Кориолиса вообще говоря - существенна. Для горизонтальной составляющей дивергенции потока массы первое слагаемое в скобках в правой части (3) (слагаемое с горизонтальными производными λ) - сокращается;

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div}_{\mathbf{H}}(\rho \vec{v}) \equiv \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) = \left[f + \frac{1}{p} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v = -2\Omega \cos(\varphi) \rho u w - \rho (a_x u + a_y v) + v^* p \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + [\Omega \cos(\varphi)]^2 \rho (ux + vy)$$

Окончательно, исходя из нестационарного уравнения неразрывности, подставив в него (4) и

вертикальную компоненту уравнения баланса импульса из (2), получим;

$$\rho w g = \frac{\partial p}{\partial t} + g \hat{\varepsilon}_h, \quad \hat{\varepsilon}_h = \int_z^{H(t)} \operatorname{div}_{\mathbf{H}}(\rho \vec{v}) dz,$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\rho w}{L_g} = \rho \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \left[\left(\frac{\hat{\varepsilon}_h}{L_g} \right) + \frac{d\hat{\varepsilon}_h}{dz} \right] \quad (5)$$

Характерный вертикальный масштаб атмосферы $L_g = C^2 / (\gamma g) \sim 10^4$ м. Для последующих оценок примем достаточно большой - «синоптический» горизонтальный масштаб моделирования $L_h \sim 10^6$ м, при котором асимптотическое приближение выполняется лучше. При этом масштаб осреднённой

вертикальной скорости воздуха в приземном слое атмосферы окажется порядка миллиметров в секунду. На рисунке (1) представлены данные наблюдений осреднённой по данным [4] вертикальной скорости воздуха в зависимости от горизонтального координатного масштаба.

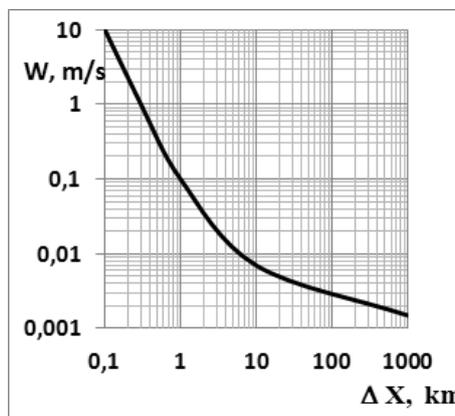


Рис. 1

Зависимость вертикальной скорости воздуха в приземном слое, осреднённой по площади с характерным размером ΔX от размера ΔX .

Для слагаемых горизонтальной части дивергенции потока массы сделаны следующие оценки, представленные в (6).

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho_*} \operatorname{div}_{\mathbf{H}}(\rho \mathbf{v}) \equiv \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \quad (6) \\
& \begin{array}{cccc}
10^{-9} \text{ s}^{-1} & & 10^{-6} \text{ s}^{-1} & 710^{-2} & 10^{-2} \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
& = \tau_w^{-1} \operatorname{ctg}(\varphi) \hat{\rho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \tau_{\text{th}}^{-1} \hat{\rho} \left\{ \frac{\text{Ro}}{\sin(\varphi)} \left[\left(\frac{\Delta T}{T} \right) \left(\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{x}} \hat{a}_y - \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{y}} \hat{a}_x \right) - \left(\operatorname{rot} \hat{\mathbf{a}} \right)_z \right] \right\} + \\
& \begin{array}{ccccccc}
710^{-5} \text{ s}^{-1} & 10^{-2} & & 10 & & 10^7 \text{ s}^{-1} & 10^{-7} \text{ s}^{-1} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
& + \frac{\Omega}{2} \sin(\varphi) \frac{\Delta T}{T} \hat{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{y}} \hat{x} - \hat{y} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\text{Ek}}{\sin(\varphi)} \hat{\rho} \left[\left(\frac{\Delta T}{T} \right) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{x}} \right) + \Omega_{\text{cycl}} \frac{\partial^2 \left(\operatorname{rot} \hat{\mathbf{v}} \right)_z}{\partial \hat{z}^2} \right] + \\
& \begin{array}{ccc}
10^{-3} \text{ s}^{-1} & 10^{-3} & & 710^{-5} \text{ s}^{-1} & & 10^{-4} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array} \\
& + \tau_{\text{vz}}^{-1} M_{\text{T}}^2 \hat{\rho} \left(\hat{u} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} + \hat{v} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \right) + \Omega M_{\text{a}}^2 \hat{\rho} \left[\sin^2(\varphi) (\hat{u} \hat{x} + \hat{v} \hat{y}) - 2 \cos(\varphi) \left(\frac{\omega_*}{\Omega L_{\text{h}}} \right) \hat{u} \hat{w} \right]
\end{aligned}$$

Здесь число Россби и число Экмана соответственно оцениваются как ;

$$\text{Ro} = u_* / (2\Omega L_{\text{h}}) \approx 7 \cdot 10^{-2}, \quad \text{Ek} = \nu / (2\Omega L_{\text{z}}^2) \approx 7 \cdot 10^{-2}$$

при горизонтальном масштабе 10^6 м и вертикальном масштабе приземного слоя 100 м. Видно, что наибольшее слагаемое в (6) соответствует второй производной по вертикальной координате для вертикальной компоненты вихря скорости. Можно принять, что вертикальный массовый поток в приземном слое не зависит от адвекции при рассмотрении задачи для больших характерных горизонтальных масштабов и достаточно слабых вихревых движений. Последнее ограничение сводится к предположению об однородности по высоте вихревых движений

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \nu^t \rho \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Притоком тепла за счёт поглощения излучения или фазовых переходов пренебрегаем.

$$\rho w = L_g \rho \hat{\varepsilon} + \delta j, \quad (8)$$

Где первое слагаемое в правой части - постоянная, соответствующая начальным условиям,

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\hat{e}_{\text{h}}}{L_g} \right) + \frac{d\hat{e}_{\text{h}}}{dz} \right] \sim \frac{\Delta u}{L_{\text{h}}}, \quad L_{\text{h}} -$$

синоптического масштаба в пределах приземного слоя, что соответствует наблюдениям. Характерное среднесуточное изменение слагаемых в правой части (5) из-за температурных изменений в приземном слое может оказаться заметным. Поэтому вертикальный поток массы ρw можно считать медленно меняющейся функцией времени для вертикальных масштабов, много меньших, чем $L_g \sim 10^4$ м. Представляет интерес выяснение вопроса об устойчивости стационарных режимов, близких к «чистой конвекции», по отношению к малым изменениям вертикальных потоков тепла и массы. Для этого рассмотрим совместное решение уравнения (5) и уравнения теплопроводности (7), записанного при допущении малости горизонтальных потоков тепла по сравнению с вертикальными;

Предположим, что вертикальный массовый расход представлен соотношением ;

горизонтальный масштаб, второе - малая нестационарная добавка, соответствующая решению в виде бегущей волны. Температура T представлена в виде ;

$$T = T_* + T_*' a^{-1} (\exp(az) - 1) + \delta T, \quad a = \frac{L_g \hat{\varepsilon}}{\nu^t}, \quad (9)$$

где первые два слагаемых - стационарное решение (7) при $\rho w = L_g \rho \hat{\varepsilon}$, а третье - нестационарное возмущение, так же представленное в виде бегущей волны. Предполагается, что вклад адвекции хотя и не

равен нулю, но настолько мал, что $az \ll 1$. Следуя обычной процедуре исследования малых возмущений типа бегущей волны с частотой ω и волновым числом k , получим дисперсионное соотношение;

$$\frac{\omega}{\kappa} \left[\kappa^2 + \left(\frac{T'_o}{T_o} + \frac{1}{L_g} \right)^2 \right] = [L_g \hat{\varepsilon} + (\kappa) v^t] \left[\kappa^2 + \frac{1}{L_g} \left(\frac{T'_o}{T_o} + \frac{1}{L_g} \right) - (\kappa) \frac{T'_o}{T_o} \right], \quad (10)$$

Из (10) следует условие неограниченного роста малых возмущений;

$$\frac{v^t}{L_g} \left(\kappa^2 + \frac{1}{L_g} \left(\frac{T'_o}{T_o} + \frac{1}{L_g} \right) \right) - \hat{\varepsilon} \frac{T'_o}{T_o} \leq 0, \quad (11)$$

При полном отсутствии адвекции ($\hat{\varepsilon} = 0$) формально для неограниченно больших длин волн неустойчивость решения по отношению к малым

изменениям вертикального теплового и массового потока наступает при

$$\frac{\partial T}{\partial z} < - \frac{g}{c_p(\gamma-1)}. \quad (12)$$

Однако при длинах волн, сравнимых с высотой приземного слоя, для развития неустойчивости потребовались бы огромные градиенты температуры, которые в приземном слое не реализуются. Наличие адвекции может быть и

стабилизирующим и дестабилизирующим фактором в зависимости от знака изменения температуры с высотой. Следует отметить, что при выполнении условия;

$$|\hat{\varepsilon}| \ll \frac{v^t}{L_g^2}, \quad (13)$$

значение величины $\hat{\varepsilon}$ вообще не существенно в (10).

Заключение. Представленная оценка показывает, что для условий, характерных в приземном слое, «асимптотическая форма» записи уравнения для нестационарного вертикального потока массы пригодна для реализации в рамках конвективной модели, хотя сила Кориолиса может быть существенна даже для вертикального масштаба ~ 100 м. Полученное решение устойчиво по отношению к малым изменениям потоков тепла и массы в пределах малой адвекции.

Литература

1. Взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью. - Математическое моделирование Земной системы / Володин Е.М. и др., под ред. Яковлева Н.Г., М.: МАКС Пресс, 2016, с. 125-150.

2. Монин А.С., Яглом А.М. «Статистическая гидромеханика»// Т.1, С-Пб, Гидрометеиздат, 1992, 695с.

3. Sandu I., Beljaars A., Bechtold P., Mauritsen T., Balsamo G. Why is it so difficult to represent stably stratified conditions in numerical weather prediction (NWP) models //J. Adv. Model. Earth Syst., 2013, v. 5, p. 117–133.

4. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы//С-Пб, Гидрометеиздат, 2000, 778 с

5. Нигматулин Р.И. «Уравнения гидро- и термодинамики атмосферы при малых силах инерции по сравнению с силой тяжести»// ПММ, Т 82, Вып. 4, 2018, с. 472-484

6. Канцырев Б.Л. Влияние параметров атмосферного воздуха и поверхностного испарения водяного пара на решение квазистационарной системы уравнений метеорологии и переноса излучения.// Известия КГТУ им. Раззакова, 2018, № 3, (47), с. 309-318